

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**

**КИЇВСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ
ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**ДОНЕЦЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ**



**О. В. Іщенко, В. М. Михальчук,
Н. І. Біла, С. В. Гайдай, О. В. Білий**

Статистичні методи у хімії

Підручник
для студентів хімічних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Донецьк ДонНУ 2012

**О. В. Іщенко, В. М. Михальчук,
Н. І. Біла, С. В. Гайдай, О. В. Білий**

СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ У ХІМІЇ

Рецензенти:

В. О. Калібабчук, доктор хімічних наук, професор, завідувач кафедри медичної та загальної хімії Київського національного медичного університету імені О.О. Богомольця;

С. А. Неділько, доктор хімічних наук, професор, професор кафедри неорганічної хімії Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

В. О. Покровський, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділом мас-спектрометрії нанорозмірних систем Інститут хімії поверхні імені О. Чуйка НАН України.

О. В. Іщенко, В. М. Михальчук, Н. І. Біла, С. В. Гайдай, О. В. Білий
Статистичні методи у хімії. Підручник для студентів хімічних спеціальностей вищих навчальних закладів. – Донецьк: Видавництво ДонНУ, 2012. - 504 с.

У підручнику викладено основи статистичної обробки результатів експерименту. Наведений матеріал є нормативним для студентів хімічних спеціальностей вищих навчальних закладів і має на меті допомогти хіміку опанувати основи теорії ймовірності та математичної статистики, щоб застосувати їх для правильної обробки отриманих експериментальних результатів. Підручник складається з шести глав. Після кожної глави вміщено питання для повторення теоретичного матеріалу і задачі для самостійного розв'язування. Наведено численні приклади статистичної обробки даних, отриманих при виконанні лабораторних робіт із фундаментальних курсів (фізичної хімії, аналітичної хімії, хімії високомолекулярних сполук).

Підручник розраховано на студентів, аспірантів і викладачів хімічних і хіміко-технологічних факультетів, а також для спеціалістів, що використовують у роботі статистичні методи.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
КОРОТКІ ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	5
ГЛАВА 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ.....	11
1.1. Подія та ймовірність її появи.....	11
1.2. Статистична частота.....	14
1.3. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій. Повна група подій.....	15
1.4. Принцип практично неможливої малої ймовірної події.....	19
1.5. Теорема множення ймовірностей.....	21
1.6. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій. Формула повної ймовірності.....	30
1.7. Ймовірність гіпотез. Формула Бейеса.....	34
1.8. Повторення дослідів. Формула Бернуллі.....	36
Питання для самостійного повторення.....	42
Задачі для самостійного розв'язку.....	43
ГЛАВА 2 ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ.....	52
2.1. Визначення випадкової величини. Біноміальне розподілення.....	52
2.2. Закон розподілення Пуассона.....	57
2.3. Безперервна випадкова величини.....	62
2.4. Математичне сподівання випадкової величини.....	65
2.5. Дисперсія випадкової величини.....	71
2.6. Нормальний закон розподілення.....	80
2.7. Двовимірна випадкова величини.....	89
2.8. Залежні і незалежні випадкові величини. Умовні закони розподілу.....	102
2.9. Чисельні характеристики двовимірної випадкової величини. Коваріація і коефіцієнт кореляції.....	113
2.10. Умовні чисельні характеристики двовимірної випадкової величини.....	124
Питання для самостійного повторення.....	129
Задачі для самостійного розв'язку.....	132
ГЛАВА 3. ТЕОРІЯ ПОМИЛОК.....	139
3.1. Оцінки числових характеристик. Рівноточні вимірювання.....	139
3.2. Розподілення Стьюдента.....	146
3.3. χ^2 -розподілення.....	149
3.4. Розподілення Фішера.....	150
3.5. Статистичні гіпотези та їх перевірка.....	152
3.6. Перевірка гіпотези однорідності результатів паралельних дослідів.....	160
3.7. Перевірка належності вибірки до нормального розподілу.....	161
3.8. Порівняння двох стандартних відхилень.....	164
3.9. Порівняння декількох стандартних відхилень.....	165
3.10. Перевірка гіпотези про рівність двох математичних сподівань.....	167
3.11. Пошук грубих помилок.....	169
3.12. Довірчий інтервал.....	173
3.13. Урахування довірчого інтервалу в записі остаточного результату вимірювання.....	179
3.14. Оцінка систематичної похибки.....	181
3.15. Нерівноточні вимірювання.....	192
3.16. Сумісність результатів досліджень.....	202
Питання для самостійного повторення.....	205
Задачі для самостійного розв'язку.....	206
Приклади статистичної обробки результатів хімічного експерименту.....	209

ГЛАВА 4. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ	227
4.1. Основне рівняння	227
4.2. Приклади обробки різних типів функціональної залежності за методом найменших квадратів	232
4.3. Лінійний однофакторний регресійний та кореляційний аналіз.....	241
4.4. Лінеаризація.....	252
4.5. Розклад у ряд за параметрами.....	256
4.6. Оцінка надійності параметрів	264
Питання для самостійного повторення.....	269
Задачі для самостійного розв'язку	270
Приклади статистичної обробки результатів хімічного експерименту.....	271
ГЛАВА 5. ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОРЕЛЯЦІЇ	356
5.1. Кореляційний момент	356
5.2. Рівняння регресії	358
5.3. Коефіцієнт кореляції.....	363
5.4. Нелінійна кореляція	369
5.5 Аналіз множинної кореляції	373
Питання для самостійного повторення.....	376
Задачі для самостійного розв'язку	376
ГЛАВА 6. ЛІНІЙНИЙ РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ХІМІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ В СИСТЕМІ STATISTICA	378
6.1. Однофакторний лінійний регресійний аналіз	378
6.1.1. Рішення задачі в системі STATISTICA	379
6.1.2. Введення даних	381
6.1.3. Специфікація змінних	382
6.1.4. Перетворення змінних.....	385
6.1.5. Вибір змінних та умов проведення аналізу.....	386
6.1.6. Оцінка адекватності моделі й параметрів рівняння регресії.....	389
6.1.7. Аналіз залишків	395
6.1.8. Визначення довірчих інтервалів для параметрів рівняння регресії.....	406
6.1.9. Визначення інтервалу завбачення й довірчих інтервалів для залежної змінної	409
6.2. Множинний лінійний регресійний аналіз.....	414
6.2.1. Введення даних і вибір змінних	417
6.2.2. Кореляційні матриці змінних	420
6.2.3. Оцінка адекватності моделі й параметрів рівняння регресії.....	424
6.2.4. Частинні коефіцієнти кореляції й толерантність.....	425
6.2.5. Аналіз залишків	430
6.2.6. Перевірка нормальності розподілу залишків.....	435
6.2.7. Визначення інтервалу завбачення й довірчих інтервалів для залежної змінної при заданих значеннях незалежних змінних	442
6.2.8. Визначення довірчих інтервалів для параметрів рівняння регресії.....	445
6.2.9. Побудова тривимірного графіка моделі	448
ГЛОСАРІЙ ОСНОВНИХ ТЕРМІНІВ І ВЕЛИЧИН СИСТЕМИ STATISTICA	452
ДОДАТОК	475
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	502

ВСТУП

Статистична обробка й аналіз результатів експерименту входять у коло питань, необхідних студентам і випускникам вищих навчальних закладів у їх навчальній і практичній роботі. Недостатнє знання сучасних методів математичної обробки даних викликає значні утруднення аналізу й інтерпретації результатів експерименту й призводить до застосування спрощених і недостатньо обґрунтованих прийомів.

Метою більшості хімічних експериментів є кількісне вивчення будь-яких властивостей речовини. На результати експериментів впливають випадкові фактори, які виникають у процесі вимірювання й обробки, що викликає розкид результатів експерименту. Щоб критично ставитися до отриманих даних і усвідомлювати, які висновки є достовірними, необхідно вміти оцінювати основні статистичні характеристики й похибку результатів вимірювання, установлювати зв'язок між визначеними фізико-хімічними величинами, висувати й перевіряти статистичні гіпотези.

У підручнику наведено основні відомості й приклади, необхідні для самостійного проведення практичних розрахунків при обробці експериментальних даних, отриманих при виконанні лабораторних робіт із фундаментальних курсів (фізичної хімії, аналітичної хімії, хімії високомолекулярних сполук, тощо). При цьому велика увага приділяється виробленню вміння постановки й перевірки статистичних гіпотез, одержанню довірчих оцінок фізико-хімічних величин і їхніх статистичних характеристик, а також умінню застосовувати регресійний аналіз до обробки вимірювань лінійних функціональних залежностей у фізичній хімії. За цієї мети у кінці розділів наведено питання і задачі для самостійного повторення та розв'язку, а також детально розглянуто приклади статистичної обробки результатів хімічного експерименту.

Розвиток і розповсюджене застосування обчислювальної техніки й, зокрема, високопродуктивних настільних комп'ютерів може істотно полегшити рішення завдань статистичної обробки результатів експериментів. Існує велика кількість універсальних інтегрованих систем статистичного аналізу й обробки даних таких, як *SPSS*, *STADI*, *STATISTICA*, *STATGRAPHICS* та інших. Вони характеризуються досить широким набором статистичних і системних процедур, що застосовуються в різних галузях діяльності людини (у природничих науках, економіці, виробництві, соціології, психології й ін.). Окремі системи статистичної обробки нараховують сотні процедур, і для їхнього кваліфікованого застосування необхідно враховувати специфічні особливості обробки даних у конкретній галузі науки, техніки, виробництва. Фундаментальні положення теорії ймовірності й математичної статистики, які викладаються в курсі вищої математики, не враховують такої специфіки й виникає необхідність у вивченні й освоєнні методів статистичної обробки результатів хімічного експерименту. Тому метою підручника є закріплення у фахівця хіміка знання про те, які процедури статистичної обробки можуть бути застосовані для обробки експериментальних даних, як застосовуються ці процедури, і яку інформацію вони дають, а також формування вміння кваліфіковано ставити завдання статистичного аналізу і інтерпретувати результати цього аналізу.

В останньому розділі посібника представлено методику проведення однофакторного й множинного регресійного аналізу результатів хімічного експерименту в системі *STATISTICA*. При цьому велика увага приділяється демонстрації можливостей комп'ютерної обробки даних із застосуванням системи *STATISTICA*.

При роботі з посібником передбачається знання основ вищої математики, включаючи елементи теорії ймовірностей, а також знання теоретичних основ статистичної обробки даних.

КОРОТКІ ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Теорія ймовірності, подібно до багатьох інших наук, розвинулася з потреб практики. Початок систематичного дослідження задач, що відносяться до масових випадкових явищ і поява відповідного математичного апарату відносяться до XVII століття. На початку XVII століття знаменитий італійський фізик Галілео Галілей вже намагався піддати науковому дослідженню помилки фізичних вимірювань, розглядаючи їх як випадкові і оцінюючи їхню ймовірність. До цього ж часу відносяться перші спроби створення загальної теорії страхування, заснованої на аналізі закономірностей в таких масових випадкових явищах, як захворюваність, смертність, статистика нещасних випадків тощо. Необхідність створення математичного апарату, спеціально пристосованого для аналізу випадкових явищ, впливала і з потреб обробки і узагальнення широкого статистичного матеріалу в усіх галузях науки.

Проте теорія ймовірності як математична наука сформувалася, в основному, не на матеріалі вказаних вище практичних задач: ці задачі дуже складні; в них закони, що керують випадковими явищами, проступають недостатньо виразно і затушовані багатьма ускладнюючими факторами. Необхідно було спочатку вивчити закономірності випадкових явищ на простішому матеріалі. Таким матеріалом історично виявилися так звані «азартні ігри». Ці ігри з давніх часів створювалися рядом поколінь саме так, щоб в них результат досліду був незалежний від його умов (що піддається спостереженню), був чисто випадковим. Саме слово «азарт» (фр. «le hasard») означає «випадок». Схеми азартних ігор дають виняткові за простотою і прозорістю моделі випадкових явищ, що дозволяють у найбільш виразній формі спостерігати і вивчати специфічні закони, що керують цими явищами, а можливість необмежено повторювати один і той самий дослід забезпечує експериментальну перевірку цих законів в умовах дійсної масовості

явищ. До сьогодні приклади з галузі азартних ігор і аналогічні їм задачі широко використовуються при вивченні теорії ймовірності як спрощені моделі випадкових явищ, що ілюструють в найбільш простому вигляді основні закони і правила теорії ймовірності.

Виникнення теорії ймовірності в сучасному змісті відноситься до середини XVII століття і пов'язане з дослідженнями французьких математиків Б. Паскаля (1623 - 1662), П. Ферма (1601 - 1665) та нідерландського вченого Х. Гюйгенса (1629 - 1695) в області теорії азартних ігор. У цих роботах поступово сформувалися такі важливі поняття, як ймовірність і математичне сподівання; були встановлені їх основні властивості і прийоми їх обчислення. Безпосереднє практичне застосування ймовірнісні методи знайшли перш за все в завданнях страхування. Вже з кінця XVII століття страхування почало проводитись на науковій математичній основі. З тих пір теорія ймовірності знаходить все більш широке застосування в різних галузях.

Великий крок вперед в розвитку теорії ймовірності пов'язаний з роботами швейцарського математика Я. Бернуллі (1654 - 1705). Йому належить перше доведення одного з найважливіших положень теорії ймовірності - так званого *закону великих чисел*. Ще до Я. Бернуллі багато хто відзначав як емпіричний факт ту особливість випадкових явищ, яку можна назвати «властивістю стійкості частот при великій кількості дослідів». Було неодноразово відмічено, що при великій кількості дослідів, результат кожного з яких є випадковим, відносна *частота* появи кожного даного результату має тенденцію стабілізуватися, наближаючись до деякого певного числа - ймовірності цього результату. Наприклад, якщо багато раз кидати монету, відносна частота появи герба наближається до $1/2$; при багатократному киданні гральної кістки частота появи грані з п'ятьма очками наближається до $1/6$ і так далі. Я. Бернуллі вперше дав теоретичне обґрунтування цьому емпіричному факту. Теорема Бернуллі є простою формою закону великих чисел; вона

встановлює зв'язок між ймовірністю події і частотою її появи; при достатньо великій кількості дослідів можна з практичною достовірністю чекати скільки завгодно близького збігу частоти з ймовірністю.

Інший важливий етап в розвитку теорії ймовірності пов'язаний з ім'ям англійського математика А. Муавра (1667—1754). Цей вчений вперше ввів і для простого випадку обґрунтував своєрідний закон, який дуже часто спостерігається у випадкових явищах: так званий *нормальний закон* (інакше - закон Гаусса). Нормальний закон грає виключно важливу роль у випадкових явищах. Теореми, що обґрунтовують цей закон для тих або інших умов, носять в теорії ймовірності загальну назву *«центральної граничної теореми»*. Видатна роль в розвитку теорії ймовірності належить знаменитому французькому математику П.С. Лапласу (1749—1827). Він вперше дав систематичне викладення основ теорії ймовірності, довів одну з форм центральної граничної теореми (теореми Муавра — Лапласа) і розвинув ряд чудових додатків теорії ймовірності до питань практики, зокрема до аналізу помилок спостережень і вимірювань. Значний крок вперед в розвитку теорії ймовірності пов'язаний з ім'ям німецького математика К.Ф. Гаусса (1777—1855), який дав ще більш загальне обґрунтування нормальному закону і розробив метод обробки експериментальних даних, відомий під назвою *«метод найменших квадратів»*. Слід також відзначити роботи французького вченого С.Д. Пуассона (1781—1840), що довів більш загальну, ніж у Я. Бернуллі, форму закону великих чисел, а також вперше застосував теорію ймовірності до задач стрілянини. З ім'ям С.Д. Пуассона пов'язаний один із законів розподілу, що грає велику роль в теорії ймовірності та її застосуванні.

Для всього XVIII і початку XIX століття був характерний бурхливий розвиток теорії ймовірності і широке захоплення нею. Теорія ймовірності стає «модною» наукою. Її починають застосовувати не тільки там, де це застосування доречно, але і там, де воно нічим не

виправдано. Для цього періоду характерні численні спроби застосувати теорію ймовірності до вивчення суспільних явищ, до так званих «моральних» або «етичних» наук. З'явилися численні роботи, присвячені питанням судочинства, історії, політики, навіть богослов'я, в яких застосовувався апарат теорії ймовірності. Для всіх цих псевдонаукових досліджень характерний надзвичайно спрощений, механістичний підхід до суспільних явищ, що розглядаються в них. В основу міркувань покладена деяка довільно задана ймовірність (наприклад, при розгляді питань судочинства схильність кожної людини до правди або брехні оцінюється деякою постійною, однаковою для всіх людей ймовірністю), і далі суспільна проблема вирішується як просте арифметичне завдання. Природно, що всі подібні спроби були приречені на невдачу і не могли зіграти позитивної ролі у розвитку науки. Навпаки, їх непрямым результатом виявилось те, що приблизно в 20-х - 30-х роках XIX століття в Західній Європі широке захоплення теорією ймовірності змінилося розчаруванням і скептицизмом. На теорію ймовірності почали дивитися як на науку сумнівну, другосортну, своєрідну математичну розвагу, навряд чи гідну серйозного вивчення.

Саме в цей час в Росії створюється знаменита Петербурзька математична школа, працями якої теорія ймовірності була поставлена на міцну логічну і математичну основу і зроблена надійним, точним і ефективним методом пізнання. З часу появи цієї школи розвиток теорії ймовірності вже найтіснішим чином пов'язаний з роботами російських вчених. Серед вчених Петербурзької математичної школи слід назвати В. Я. Буняківського (1804 - 1889) - автора першого курсу теорії ймовірності російською мовою, творця сучасної російської термінології в теорії ймовірності, автора оригінальних досліджень в області статистики і демографії. Учень В. Я. Буняківського був великий російський математик П. Л. Чебишев (1821 - 1894). Серед різноманітних праць П. Л. Чебишева помітне місце займають його праці з теорії

ймовірності. Йому належить подальше розширення і узагальнення закону великих чисел. Крім того, П. Л. Чебишев ввів в теорію ймовірності вельми могутній і плідний метод моментів. Учень П. Л. Чебишева був А. А. Марков (1856 - 1922), що також збагатив теорію ймовірності відкриттями і методами великої важливості. Він істотно розширив сферу застосування закону великих чисел і центральної граничної теореми, розповсюдивши їх не тільки на незалежні, але і на залежні дослідження. Найважливішою заслугою А. А. Маркова є закладення основи абсолютно нової гілки теорії ймовірності - теорії випадкових, або «стохастичних», процесів. Розвиток цієї теорії складає основний зміст новітньої, сучасної теорії ймовірності. Учень П. Л. Чебишева був також Олександр Михайлович Ляпунов (1857 - 1918), з ім'ям якого пов'язано перше доведення центральної граничної теореми за надзвичайно загальних умов. Для доведення своєї теореми А. М. Ляпунов розробив спеціальний метод характеристичних функцій, широко вживаний в сучасній теорії ймовірності. Характерною особливістю робіт Петербурзької математичної школи була виняткова чіткість постановки завдань, повна математична строгість вживаних методів і разом з цим тісний зв'язок теорії з безпосередніми вимогами практики. Працями учених Петербурзької математичної школи теорія ймовірності була виведена із задвірків науки і поставлена як повноправна в ряд точних математичних наук. Умови застосування її методів були строго визначені, а самі методи доведені до високого ступеня досконалості.

Сучасний розвиток теорії ймовірності характерний загальним підйомом інтересу до неї і різким розширенням кола її практичних застосувань. За останні десятиліття теорія ймовірності перетворилася на одну з наук, що найшвидше розвивається і найтіснішим чином пов'язана з потребами практики і техніки. Слід назвати тільки деяких радянських вчених, праці яких зіграли суттєву роль в розвитку сучасної теорії ймовірності та її практичного застосування. С.Н. Бернштейн розробив

першу закінчену аксіоматику теорії ймовірності, а також істотно розширив сферу застосування граничних теорем. О.Я. Хинчин (1894—1959) відомий своїми дослідженням в області подальшого узагальнення і посилення закону великих чисел, але головним чином своїми дослідженнями в області так званих стаціонарних випадкових процесів. Ряд найважливіших робіт в різних областях теорії ймовірності і математичної статистики належать А.М.Колмогорову. Він дав найбільш досконалу аксіоматичну побудову теорії ймовірності, пов'язавши її з одним з найважливіших розділів сучасної математики - метричною теорією функцій. Особливе значення мають роботи А.М. Колмогорова в області теорії випадкових функцій (стохастичних процесів), які в даний час є основою всіх досліджень в даній області. Роботи А.М. Колмогорова, що відносяться до оцінки ефективності лягли в основу цілого нового наукового напрямку в теорії стрільянини, який переріс потім в ширшу науку про ефективність бойових дій. В. І. Романовський (1879 - 1954) і М. В. Смирнов відомі своїми роботами в області математичної статистики, Є. Є. Слуцький (1880 - 1948) - в теорії випадкових процесів, Б. В. Гнеденко - в теорії масового обслуговування, Е. Б. Динкин - в області марківських випадкових процесів, В. С. Пугачов - в галузі випадкових процесів в застосуванні до задач автоматичного управління.

Розвиток зарубіжної теорії ймовірності в даний час також йде посиленними темпами у зв'язку з вимогами практики. Переважною увагою користуються, як і у нас, питання, що відносяться до випадкових процесів. Значні роботи в цій області належать, наприклад, американським вченим Н. Вінеру (1894-1964), В. Феллеру (1906-1970), Д. Дубу. Важливі роботи по теорії ймовірності і математичній статистиці належать англійському статистику Р. Е. Фішеру (1890-1962) і американському математику Д. Нейману (1903-1957).

ГЛАВА 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1. Подія та ймовірність її появи

Теорія ймовірностей – це наука про *випадкові події*. Поняття *подія* належить до числа основних. Можна вважати, що подія – це все те, що може статися чи не статися при визначених умовах. Наприклад, подія може бути у появі герба при киданні монети. В цьому випадку подія проявляється у процесі кидання монети. Подія може визначатися у тому, що деякі вироби, вибрані з партії готових виробів, можуть бути бракованими. В цьому випадку подія – це акт *вибірки* виробів з партії. У наведених прикладах подія – це дослідження, що проводиться людиною, але не обов'язково «дослідження» пов'язано з діяльністю людини. Наприклад, подія може полягати у тому, що у довільну добу йде дощ над Одесою і реалізується у тому, що в Одесі настав дощовий день. Таким чином, *подія* – це будь яке явище живої або неживої природи, чи суспільного життя. Події в теорії ймовірностей позначаються умовно великими літерами латинської абетки: A, B, C, D тощо, чи однією літерою (звичайно A) з підстрочними індексами: $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$, у загальному вигляді – A_i . Наприклад, подія A – «випав дощ», подія B – «студент склав іспит» тощо. Якщо подія складається з появи якоїсь кількості очок на гральному кубіку при його киданні, то в цьому випадку зручно використовувати позначення A_i : тобто A_1 – поява одиниці, A_2 – поява двійки, A_3 – поява трійки тощо.

Характерною рисою *випадкової* події є те, що в результаті досліджень вона відбувається не обов'язково. Це відрізняє випадкові події від детермінованих, які відбуваються обов'язково. Випадковість події пов'язана з тим, що багато факторів, які супроводжують дослідження та важливі для її проходження, не задаються. Ця неповнота

інформації в одних випадках є принциповою (наприклад, в азартних іграх, чи у військових діях), чи недоступною сучасному рівню розвитку науки (наприклад, при складанні прогнозу погоди). Припущення про принципову непередбаченість результатів окремих досліджень знаходиться в основі деяких наук, таких як квантова механіка, соціологія тощо. В деяких випадках передбачення результатів досліджень є принципово можливим, але недоцільним практично, тому що воно потребує невиправданих витрат на додаткових надточних вимірювань.

Закономірність випадкових подій проявляється *при багатократному повторенні досліджень*. Наприклад, неможна передбачити результат одиничного кидання монети: може з'явитися як герб, так і решка. Нікого особливо не здивує, якщо при десятикратному киданні герб з'явиться всього два рази, але якщо при 1000-кратному киданні герб з'являється всього 200 разів, то будь-хто має право сказати, що щось сталося з монетою, чи з киданням. Тому що при симетричних умовах ні герб, ні решка не мають переваги один перед одним, тобто вони мають з'являтися приблизно з однаковою частотою. Звичайно, після 1000 кидків герб не обов'язково з'явиться 500 разів, він може з'явитися і 490, і 525 разів, але ж не 100! Подібним чином результат одноразової вибірки з партії виробів не дозволяє зробити висновок про якість партії, це можна зробити тільки при багатократній вибірці, як кажуть, при великому об'ємі вибірки. Отже, для уточнення першої фрази цього абзацу часто кажуть не взагалі про випадкові події, а про масові випадкові події, розуміючи під масовістю багатократне повторення. Відмітимо, що повторення можна розуміти двояко. Наприклад, можна 1000 разів підкинути одну й ту ж монету, або можна підкинути незалежно 1000 однакових монет – це повністю рівноцінно.

Теорія ймовірностей розглядає різні події з точки зору оцінки можливості їх здійснення. Кожній події ставиться у відповідність визначене число, яке називається *ймовірністю даної події*.

Ймовірність позначається літерою P (від французького «probabilite», чи англійського «possibility» - ймовірність). Наприклад, $P(B)$ – ймовірність появи події B ; $P(A_i)$ - ймовірність появи події A_i . За одиницю приймають ймовірність *вірогідної події*.

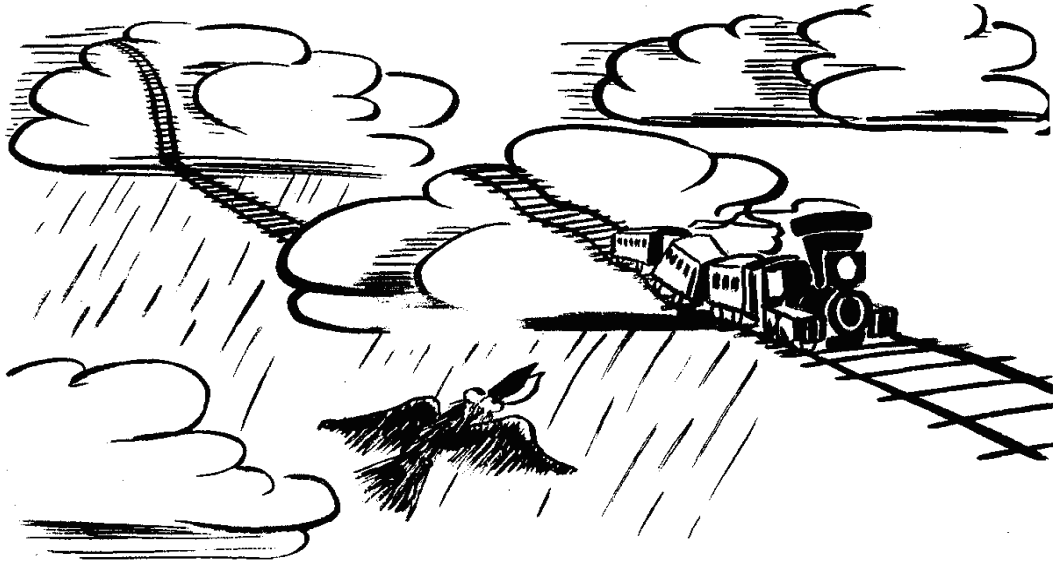


Рис. 1.1. Приклад неможливої події

Ймовірність *неможливої події* приймають за нуль, отже

$$0 \leq P(A_i) \leq 1 \quad (1.1)$$

Події A та B , для яких $P(A) = P(B)$, називають *рівноймовірними*. У випадку рівноймовірних подій:

$$P = \frac{1}{n} \quad (1.2)$$

Формулу (1.2) можна узагальнити:

$$P = \frac{m}{n}, \quad (1.3)$$

де m - число сприятливих даній події результатів, n - загальне число результатів.

1.2. Статистична частота

На практиці не завжди можна скористатися формулою (1.3) для знаходження ймовірності тої чи іншої події. Замість цього визначають

близьку до ймовірності величину, яка є її мірою, її оцінкою – це *статистична частота* даної події:

$$P^*(A_i) = \frac{g_i}{n}, \quad (1.4)$$

де g_i - це число дослідів, у яких дана подія (A_i) дійсно з'явилась (статистична вага даної події), n - загальне число дослідів.

Наприклад, при киданні монети відомо, що ймовірність появи решки $p = \frac{1}{2}$. Розглянемо, як веде себе статистична частота. В таблиці 1.1 наведені результати дослідів, які провели Жорж Луи Леклерк де Бюффон та Карл Пірсон.

Таблиця 1.1

Результати дослідів Луи Леклерка де Бюффона та Карла Пірсона

Експериментатор	Число кидків (n)	Число появи решки (g_i)	$P_i^* = \frac{g_i}{n}$
Ж.Л.Л.Бюффон	4040	2048	0,5080
К.Пірсон	12000	6019	0,5016
К.Пірсон	24000	12012	0,5005

З наведених даних видно, що при достатньо великому числі дослідів (n) статистична частота (P^*) практично не відрізняється від відповідного значення ймовірності ($P_i = 0,5$), причому, чим більше значення n , тим розходження поміж P^* та P зменшується. Ця обставина була строго доведена Я. Бернуллі в його теоремі.

Теорема Бернуллі стверджує, що до одиниці прямує ймовірність того, що при $n \rightarrow \infty$ статистична частота $P^*(A_i)$ деякої події (A_i) відхилиться (за абсолютною величиною) від ймовірності $P(A_i)$ цієї події на величину, меншу за будь-яке мале задане число ε :

$$P\{|P_i^* - P_i| < \varepsilon\} \rightarrow 1 \quad \text{іде } n \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

1.3. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій. Повна група подій

Сумою $A + B$ двох подій називається подія, яка складається з появи події A та події B , чи обох цих подій разом. Наприклад, якщо з гармати зроблено два постріли, A – влучення при першому пострілі, B – влучення при другому пострілі, то $A + B$ – це влучення при першому пострілі, чи при другому, чи при обох пострілах. Якщо два постріли A та B – несумісні, то $A + B$ – це подія, яка складається з появи однієї з цих подій, немає значення якої.

Сумою декількох подій називається подія, яка складається з появи хоча б однієї з цих подій. Наприклад, подія $A + B + C$ складається з появи однієї з наступних подій: A, B, C ; A та B ; A та C ; B та C ; A та B та C .

Нехай події A та B – несумісні, причому ймовірності цих подій відомі. Як знайти ймовірність того, що станеться подія A , або подія B ? Відповідь на це питання дає *теорема додавання*.

Теорема. Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій, немає значення якої з них, дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

Доведення. Вводимо позначення: n – загальне число можливих елементарних результатів досліджень; m_1 – число, результатів, які сприятливі для події A ; m_2 – число результатів, які сприятливі для події B . Число результатів, які сприятливі появі події A , або події B , дорівнює $m_1 + m_2$. Отже, $P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}$. Приймавши до уваги, що $\frac{m_1}{n} = P(A)$ та $\frac{m_2}{n} = P(B)$, отримуємо:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1.6)$$

Наслідок. Ймовірність появи однієї з декількох попарно несумісних подій, немає значення якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \quad (1.7)$$

Приклад 1.1. У закритому штативі знаходиться 30 пробірок: 10 з червоним розчином, 5 з блакитним та 15 прозорих. Знайти ймовірність появи кольорової пробірки.

Розв'язок. Поява пробірки з кольоровим розчином означає появу пробірки з червоним або блакитним розчином. Ймовірність появи

пробірки з червоним розчином (подія A) дорівнює: $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Ймовірність появи пробірки з блакитним розчином (подія B) дорівнює:

$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$. Події A та B несумісні (поява пробірки одного

кольору виключає появу пробірки другого кольору), тому можна використати теорему додавання. Ймовірність, яку запитують у задачі, дорівнює:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \quad (1.8)$$

Система подій A_1, A_2, \dots, A_n складає повну групу, якщо в дослідах обов'язково наступить одна з цих подій. Із визначення зрозуміло, що події, які утворюють повну групу, єдино можливі та попарно несумісні.

Приклад 1.2. Кинута гральна кістка. Нехай подія A_1 - поява цифри „1”, A_2 - поява цифри „2”, ..., A_6 - поява цифри „6”. Система подій $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ є повною групою.

Оскільки поява однієї з подій повної групи є достовірною, а ймовірність достовірної події дорівнює одиниці, то має місце рівняння:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1. \quad (1.9)$$

Теорема. Сума ймовірностей подій, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці.

Доведення. Будь-які дві події повної групи несумісні, тому можна застосувати теорему додавання:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Прийнявши до уваги (1.9), отримуємо:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1. \quad (1.10)$$

Приклад 1.3. Викладач отримує пакети з контрольними роботами від груп A , B та C . Ймовірність отримання пакета від групи A дорівнює $0,7$, від групи B – $0,2$. Знайти ймовірність того, що черговий пакет буде отримано від групи C .

Розв'язок. Події „отримання пакета від групи A ”, „отримання пакета від групи B ” та „отримання пакета від групи C ” утворюють повну групу подій, тому сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці: $0,7 + 0,2 + p = 1$. Ймовірність, що шукається, дорівнює: $p = 1 - 0,9 = 0,1$.

Якщо дві події складають повну групу, то вони є *протилежними*. Якщо одну з двох протилежних подій позначити через A , то другу можна позначити через \bar{A} .

Приклад 1.4. Складання або не складання заліку – це протилежні події. Якщо A – "залік складено", то \bar{A} – "залік не складено".

Теорема. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці.

Доведення. Оскільки дві протилежні події складають повну групу, то до них можна застосувати формулу (1.10), що дає:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (1.11)$$

Якщо ймовірність однієї з двох протилежних подій позначити через p , а іншої через q , то формула (1.11) набуває такого вигляду:

$$p + q = 1. \quad (1.12)$$

Приклад 1.5. Ймовірність того, що день буде дощовим, дорівнює $p = 0,7$. Знайти ймовірність того, що день буде ясным.

Розв'язок. Події „день дощовий” та „день ясный” – протилежні, тому ймовірність того, що день буде ясным дорівнює:

$$q = 1 - p = 1 - 0,7 = 0,3.$$

1.4. Принцип практично неможливої малоїмовірної події

При розв'язку багатьох задач, що виникають на практиці, доводиться мати справу із подіями, ймовірність яких близька до нуля. Чи можна вважати, що малоїмовірна подія A в одному дослідженні не відбудеться? Такого висновку зробити не можна, тому що не виключено, хоч і малоїмовірно, що подія A все ж таки відбудеться.

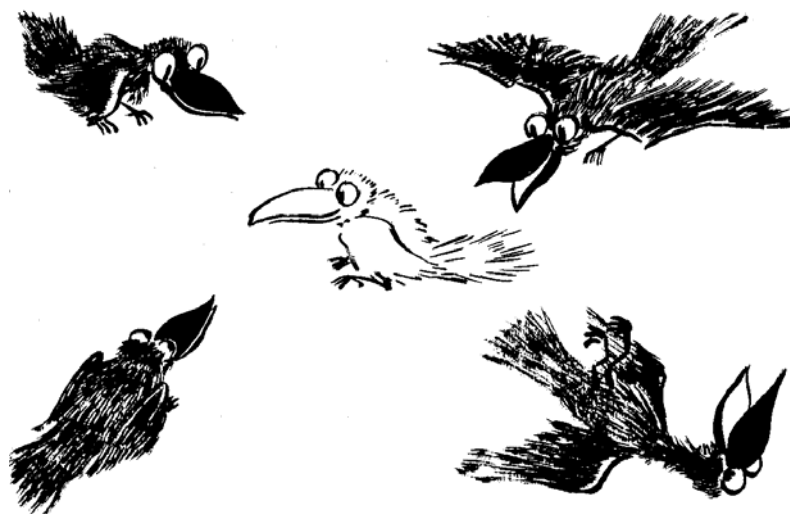


Рис. 1.2. Приклад малоїмовірної події

Здавалось би, що появу чи не появу малоїмовірної події в одиничному досліді передбачити неможливо, але довгий життєвий досвід показує, що малоїмовірні події в одиничному досліді у більшості випадків не відбуваються. Спираючись на цей факт приймають „принцип практично неможливих малоїмовірних подій”: якщо випадкова подія має дуже малу ймовірність, то практично можна вважати, що в одиничному досліді ця подія не відбудеться.

Природно виникає питання: наскільки малою повинна бути ймовірність події, щоб можна було вважати неможливим її появу в одиничному досліді? На це питання не можна дати однозначну відповідь. Для задач, різних за своєю суттю, відповіді є різними. Наприклад, якщо ймовірність того, що парашут при стрибку не відкриється, дорівнює 0,01, то такі парашути використовувати неприпустимо. Якщо ж ймовірність того, що потяг прибуде із запізненням, дорівнює 0,01, то можна практично бути впевненим, що потяг прибуде вчасно.

Підкреслимо, що розглянутий тут принцип дозволяє робити передбачення не тільки про події, що мають малу ймовірність, але і про події, ймовірність яких близька до одиниці. Дійсно, якщо подія A має ймовірність близьку до нуля, то ймовірність протилежної події \bar{A} близька до одиниці. З іншого боку, не поява події A означає появу події \bar{A} . Таким чином, з принципу неможливості малоїмовірної події випливає наступний важливий *наслідок*: якщо випадкова подія має ймовірність дуже близьку до одиниці, то практично можна вважати, що в одиничному досліді ця подія наступить. Зрозуміло, що і тут питання про те, яку ймовірність вважати близькою до одиниці, залежить від суті задачі.

1.5. Теорема множення ймовірностей

Дві події називаються *незалежними*, якщо ймовірність однієї з них не залежить від появи, чи не появи іншої.

Приклад 1.6. Монету кинуть 2 рази. Ймовірність появи герба в першому досліді (подія A) не залежить від появи чи не появи герба у другому досліді (подія B). У свою чергу, ймовірність появи герба у другому досліді не залежить від результатів першого досліді. Таким чином, події A та B – незалежні.

Приклад 1.7. В коробці знаходиться 5 білих та 3 чорних склянки. З коробки навмання виймають одну склянку. Зрозуміло, що ймовірність появи білої склянки (подія A) дорівнює $\frac{5}{8}$. Склянку, що вийняли, поклали назад у коробку та дослід повторили. Ймовірність появи білої склянки при другому досліді (подія B), як і раніше дорівнює $\frac{5}{8}$ та не залежить від результату першого досліді. У свою чергу, ймовірність появи білої склянки при першому досліді не залежить від результату другого досліді. Таким чином, події A та B є незалежними.

Приклад 1.8. Монету кинуть 3 рази. Нехай A , B , C – події, що являють собою появу герба відповідно у першому, другому та третьому досліді. Зрозуміло, що кожні дві події з розглянутих подій (тобто A та B , A та C , B та C) є незалежними.

Дві події називаються *залежними*, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від здійснення чи нездійснення другої події.

Приклад 1.9. В коробці знаходиться 100 капілярів: 80 стандартних та 20 нестандартних. Навмання беруть один капіляр, не

повертаючи його назад у коробку. Якщо з'явився стандартний капіляр (подія A), то ймовірність появи стандартного капіляру при другому досліді (подія B) дорівнює $P(B) = \frac{79}{99}$; якщо ж в першому досліді вийнято нестандартний капіляр, то ймовірність $P(B) = \frac{80}{99}$. Таким чином, ймовірність появи події B залежить від появи чи не появи події A . Тут події A та B – залежні.

Добутком двох сумісних подій A та B називається подія AB , яка складається з появи обох цих подій.

Наприклад, якщо у коробці знаходяться стандартні та нестандартні деталі, які виготовлені заводами №1 та №2, подія A – це поява стандартної деталі, подія B – це поява нестандартної деталі, C – це поява деталі, яка виготовлена заводом №1, D – це поява деталі, яка виготовлена заводом №2, то подія AC – це поява стандартної деталі, яка вироблена заводом №1.

Добутком декількох подій називається подія, яка складається з одночасної появи всіх цих подій. Наприклад, подія ABC складається з поєднання подій A , B та C .

Розглянемо добуток двох незалежних подій. Нехай події A та B незалежні. Як знайти ймовірність добутку цих подій A та B ? Відповідь на це питання дає теорема множення.

Теорема. Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

Доведення. Вводимо позначення: n – число можливих елементарних випадків дослідів, в яких подія A з'являється чи не з'являється; n_1 – число випадків, що сприятливі події A ($n_1 \leq n$); m –

число можливих елементарних випадків дослідів, в яких подія B з'являється чи не з'являється; m_1 - число випадків, що сприятливі події B ($m_1 \leq m$).

Загальне число можливих елементарних випадків дослідів (в яких настає A , B , чи A та \bar{B} , чи \bar{A} та B , чи \bar{A} та \bar{B}) дорівнює nm . Дійсно, кожний з n випадків, в яких подія A з'являється чи не з'являється, може бути сумісним з кожним з m випадків, в яких подія B з'являється чи не з'являється. З цього числа $n_1 m_1$ дослідів сприяють одночасній появі подій A та B . Дійсно, кожен з n_1 дослідів, що сприяють події A , може поєднуватися з кожним з m_1 дослідів, що сприяють події B . Ймовірність одночасної появи подій A та B дорівнює: $P(AB) = \frac{n_1 m_1}{nm} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m_1}{m}$. Якщо прийняти до уваги, що

$\frac{n_1}{n} = P(A)$ та $\frac{m_1}{m} = P(B)$, маємо:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.13)$$

Для того, щоб узагальнити теорему множення на декілька подій, введемо поняття незалежних подій у сукупності.

Декілька подій називаються *незалежними у сукупності*, якщо кожна з них у будь-якій комбінації з іншими подіями (які складаються з усіх інших подій чи з їх частини) є подія незалежна. Наприклад, якщо події A_1 , A_2 та A_3 незалежні у сукупності, то незалежними є події: A_1 та A_2 , A_1 та A_3 , A_2 та A_3 , $A_1 A_2$ та A_3 , $A_1 A_3$ та A_2 , $A_2 A_3$ та A_1 .

Підкреслимо, що якщо декілька подій незалежні попарно, то звідси не випливає їх незалежність у сукупності. В цьому сенсі вимога

незалежності подій у сукупності більш жорстка, ніж вимога їх попарної незалежності.

Наслідок. Ймовірність сумісної появи декількох подій, які незалежні у сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n). \quad (1.14)$$

Доведення. Розглянемо три події A , B та C . Суміщення подій A , B та C рівнозначно суміщенню AB та C , тому $P(ABC) = P(AB \cdot C)$. Так як події A , B та C незалежні у сукупності, то незалежні, і події AB та C , а також A та B . За теоремою множення для двох незалежних подій маємо: $P(AB \cdot C) = P(AB) \cdot P(C)$ та $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Значить, можна записати:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C). \quad (1.15)$$

Зауваження. Якщо події A_1, A_2, \dots, A_n незалежні у сукупності, то і протилежні їм події $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ також незалежні у сукупності.

Приклад 1.10. Знайти ймовірність сумісної появи решок при одному киданні двох монет.

Розв'язок. Ймовірність появи решки першої монети (подія A) дорівнює $P(A) = \frac{1}{2}$. Ймовірність появи решки другої монети (подія B) дорівнює $P(B) = \frac{1}{2}$. Оскільки події A та B незалежні, то необхідна

ймовірність за теоремою множення дорівнює:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Приклад 1.11. Маємо 3 ящики, в яких знаходяться по 10 склянок з розчинами. В першому ящику 8, у другому – 7, в третьому – 9 стандартних розчинів. З кожного ящика навмання виймають по одній склянці. Знайти ймовірність того, що у всіх трьох вийнятих склянках розчини будуть стандартними.

Розв'язок. Ймовірність того, що з першого ящику вийнято склянку із стандартним розчином (подія A), дорівнює $P(A) = \frac{8}{10} = 0,8$. Ймовірність того, що з другого ящику вийнято склянку із стандартним розчином (подія B), дорівнює $P(B) = \frac{7}{10} = 0,7$. Ймовірність того, що з третього ящику вийнято склянку із стандартним розчином (подія C), дорівнює $P(C) = \frac{9}{10} = 0,9$. Так як події A , B та C незалежні у сукупності, то необхідна ймовірність (за теоремою множення) дорівнює: $P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504$.

Припустимо, що в результаті досліджень може з'явитися n подій незалежних у сукупності. Як знайти ймовірність того, що наступить хоча б одна з цих подій? Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема. Ймовірність появи хоча б однієї події A_1, A_2, \dots, A_n , незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею и добутком ймовірностей протилежних подій $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$.

Доведення. Позначимо через A подію, що складається з появи хоча б однієї з подій A_1, A_2, \dots, A_n . Події A та $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ (ні одна з подій не наступила) протилежні, значить, сума їх ймовірностей дорівнює одиниці: $P(A) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) = 1$. Використовуючи (1.11) та теорему множення, отримуємо:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n. \quad (1.16)$$

Окремий випадок. Якщо події A_1, A_2, \dots, A_n мають однакову ймовірність, яка дорівнює p , то ймовірність появи хоча б однієї з цих подій дорівнює:

$$P(A) = 1 - q^n. \quad (1.17)$$

Приклад 1.12. Ймовірність влучення в ціль при стрільбі з трьох гармат дорівнюють: 0,8; 0,7; 0,9, відповідно. Знайти ймовірність хоча б одного влучення (подія A) при одному залпі з усіх гармат.

Розв'язок. Ймовірність влучення в ціль кожною гарматою не залежить від результатів стрільби з інших гармат, тому подія A_1 (влучення першою гарматою), A_2 (влучення другою гарматою) та A_3 (влучення третьою гарматою) незалежні у сукупності. Ймовірності подій, які протилежні подіям A_1, A_2 та A_3 (тобто ймовірності промахів), відповідно дорівнюють:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,8 = 0,2;$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,7 = 0,3;$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Ймовірність, що запитується, дорівнює:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994.$$

Тепер розглянемо ситуацію, коли події A та B залежні. З визначення залежних подій випливає, що ймовірність однієї події залежить від появи чи не появи іншої. Тому, якщо нас цікавить ймовірність, наприклад, події B , то важливо знати, чи відбулася подія A .

Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називається ймовірність події B , яку розраховують з припущення, що подія A вже відбулася.

Приклад 1.13. В коробці знаходяться 3 білі та 3 чорні кулі. З коробки двічі виймають навмання по одній кулі, не повертаючи їх назад у коробку. Знайти ймовірність появи білої кулі при другому досліді (подія B), якщо при першому досліді була вийнята чорна куля (подія A).

Розв'язок. Після першого досліді в коробці залишилось 5 куль, з них 3 білі. Умовна ймовірність, яку шукають, дорівнює $P_A(B) = \frac{3}{5}$.

Зауваження. З визначення незалежних подій наслідком є те, що поява однієї з них не змінює ймовірності появи іншої. Тому для незалежних подій справедливим є рівняння:

$$P_A(B) = P(B) \text{ та } P_B(A) = P(A).$$

Таким чином, умовні ймовірності незалежних подій дорівнюють їх безумовним ймовірностям.

Нехай події A та B залежні, причому ймовірності $P(A)$ та $P(B)$ відомі. Як знайти ймовірність суміщення цих подій, тобто ймовірність того, що з'явиться і подія A , і подія B ?

Відповідь на це питання дає теорема множення залежних подій.

Теорема. Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, яка розраховується з припущення, що перша подія вже відбулася.

Доведення. Позначимо: n - число можливих елементарних результатів дослідів, в яких подія A відбулася чи не відбулася; n_1 - число результатів, що сприятливі події A ($n_1 \leq n$); m - число елементарних результатів дослідів, в яких відбувається подія B , з припущенням, що подія A вже відбулася. Тобто ці результати сприяють появи події AB ($m \leq n_1$). Ймовірність сумісної появи подій A та B

дорівнює: $P(AB) = \frac{m}{n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m}{n_1}$. Якщо прийняти до уваги, що

$\frac{n_1}{n} = P(A)$ та $\frac{m}{n_1} = P_A(B)$, то отримуємо результат:

$$P(AB) = P(A)P_A(B). \quad (1.18)$$

Зауваження. Якщо застосувати формулу (1.18) до події BA , маємо $P(BA) = P(B)P_B(A)$ чи (оскільки подія BA не відрізняється від події AB):

$$P(AB) = P(B)P_B(A). \quad (1.19)$$

Якщо порівняти формули (1.18) та (1.19), то можна записати рівняння

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A) \quad (1.20)$$

Наслідок. Ймовірність сумісної появи декількох залежних подій дорівнює добутку ймовірності одного з них на умовну ймовірність усіх інших, причому ймовірність кожної наступної події розраховується з умови, що всі попередні події вже з'явилися:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n),$$

де $P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$ - ймовірність події A_n , яка розраховується з умови, що події $A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}$ відбулися. Таким чином, для трьох залежних подій маємо: $P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$. Зазначимо, що порядок, в якому розташовані події, може бути вибрано довільно, тобто немає значення, яка подія перша, яка друга і так далі.

Приклад 1.14. В ящику лежать 3 білі та 7 червоних куль. Студент навмання взяв одну кулю, а потім другу. Знайти ймовірність того, що перша куля має білий колір, а друга – червоний.

Розв'язок. Ймовірність того, що перша куля має білий колір (подія A), дорівнює $P(A) = \frac{3}{10}$.

Ймовірність того, що друга куля має червоний колір (подія B), розраховується із припущення, що перша куля мала білий колір, тобто умовна ймовірність дорівнює $P_A(B) = \frac{7}{9}$. Ймовірність, яку розраховуємо за теоремою множення ймовірностей залежних подій, дорівнює:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}. \quad \text{Відмітимо, що із збереженням}$$

позначень, можна легко знайти $P(B) = \frac{7}{10}$, $P_B(A) = \frac{3}{9}$,

$$P(B) \cdot P_B(A) = \frac{7}{30}.$$

1.6. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій. Формула повної ймовірності

Нехай події A та B сумісні, причому відомі ймовірності цих подій та ймовірність їх сумісної появи. Як знайти ймовірність події $(A + B)$, яка складається з появи хоча б однієї з подій A та B ? Відповідь на це питання дає теорема додавання ймовірностей сумісних подій.

Теорема. Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи.

Доведення. Подія A буде виконана, якщо з'явиться одна із двох подій $A\bar{B}$ чи AB . За теоремою додавання ймовірностей несумісних подій маємо:

$$P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB), \quad P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) \quad (a)$$

Аналогічно маємо:

$$P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB), \quad P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) \quad (b)$$

Подія $(A + B)$ буде реалізована, якщо з'явиться одна з наступних подій: $\bar{A}B$, $A\bar{B}$ чи AB . За теоремою додавання ймовірність

несумісних подій: $P(A + B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB)$. Підставляючи в це рівняння (a) та (b), отримуємо:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (1.21)$$

Зауваження. При використанні отриманої формули треба мати на увазі, що A та B можуть бути як незалежними, так і залежними.

Для незалежних подій: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$;

для залежних подій: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B)$.

Зауваження. Якщо події A та B несумісні, то їх суміщення є неможливою подією, тому $P(AB) = 0$. Формула (1.21) для несумісних подій приймає вигляд: $P(A + B) = P(A) + P(B)$, тобто отримуємо формулу (1.6) теореми додавання для несумісних подій. Таким чином, формула (1.21) справедлива як для сумісних, так і для несумісних подій.

Приклад 1.15. Ймовірності влучення в мішень при стрільбі першої та другої гармати дорівнюють 0,7 та 0,8, відповідно. Знайти ймовірність влучення при одному пострілі (з обох гармат) хоча б однією гарматою.

Розв'язок. Ймовірність влучення в ціль кожною з гармат не залежить від результату стрільби з другої гармати, тому подія A (влучення першою гарматою) дорівнює $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$. Ймовірність, яку розраховуємо, дорівнює: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94$.

Зауваження. Так як в цьому прикладі події A та B незалежні, то можна було б скористатися формулою $P = 1 - q_1 q_2$. Дійсно,

ймовірності подій, протилежних подіям A та B , тобто ймовірність промахів, відповідно, дорівнюють: $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,7 = 0,3$; $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,8 = 0,2$. Ймовірність того, що при одному пострілі хоча б одна гармата влучить, дорівнює: $P = 1 - q_1 q_2 = 1 - 0,3 \cdot 0,2 = 0,94$. Як і можна було сподіватися, отримуємо той же результат.

Подія A може з'явитися при умові появи однієї з несумісних подій B_1, B_2, \dots, B_n . Відомі ймовірності цих подій та умовні ймовірності $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots, P_{B_n}(A)$ події A . Як знайти ймовірність події A ? Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема. Ймовірність події A , яка може наступити лише при умові появи однієї з несумісних подій B_1, B_2, \dots, B_n , дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну ймовірність події A .

Доведення. За умовою подія A може наступити, якщо наступить одна з несумісних подій B_1, B_2, \dots, B_n . Це те ж саме, що поява події A виконання одного, немає значення якої, з несумісних подій $B_1 A, B_2 A, \dots, B_n A$. Використовуючи для розрахунків ймовірності подій A теорему додавання, отримуємо:

$$P(A) = P(B_1 A) + P(B_2 A) + \dots + P(B_n A) \quad (c)$$

Залишається розрахувати кожний з доданків. За теоремою добутку ймовірностей залежних подій маємо:

$$P(B_1 A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A);$$

$$P(B_2 A) = P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)$$

.....

$$P(B_n A) = P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

Підставивши праві частини цих рівнянь у рівняння (с), отримуємо формулу повної ймовірності:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A). \quad (1.22)$$

Приклад 1.16. Маємо дві коробки деталей. У першій коробці знаходиться 10 деталей, а у другій - 15. Ймовірність того, що деталь з першої коробки стандартна, дорівнює 0,8, а з другої – 0,9. Знайти ймовірність того, що деталь, яка взята навмання (з навмання взятої коробки), є стандартною.

Розв'язок. Позначимо через A таку подію – деталь, що витягли, є стандартною. Деталь може бути витягнутою з першої коробки (подія B_1), чи з другої (подія B_2). Ймовірність того, що деталь витягнуть з першої коробки, дорівнює $P(B_1) = \frac{1}{2}$. Ймовірність того, що деталь витягнуть з другої коробки, дорівнює $P(B_2) = \frac{1}{2}$. Умовна ймовірність того, що з першої коробки буде витягнута стандартна деталь, дорівнює $P_{B_1}(A) = 0,8$. Умовна ймовірність того, що з другої коробки буде витягнута стандартна деталь, дорівнює: $P_{B_2}(A) = 0,9$.

Необхідна ймовірність того, що буде витягнута навмання деталь – стандартна, має бути повною ймовірністю:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,9 = 0,85.$$

1.7. Ймовірність гіпотез. Формула Бейеса

Подія A може наступити за умови появи однієї з несумісних подій B_1, B_2, \dots, B_n . Так як заздалегідь невідомо, яка з цих подій наступить, то їх називають *гіпотезами*. Ймовірність появи події A визначається за формулою повної ймовірності (1.22):

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

Припустимо, що провели дослідження, в результаті якого з'явилась подія A . Поставимо за мету визначити, як зміниться (у зв'язку з тим, що подія A вже настала) ймовірності гіпотез. Іншими словами, будемо шукати умовні ймовірності: $P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n)$. Знайдемо спочатку умовну ймовірність $P_A(B_1)$. За теоремою множення маємо: $P(AB_1) = P(A) \cdot P_A(B_1) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)$. Звідки

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Якщо провести заміну $P(A)$ за формулою (1.22), то отримуємо:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}.$$

Аналогічно виводяться формули, що визначають умовні ймовірності інших гіпотез, тобто умовна ймовірність будь-якої гіпотези $B_i (i = 1, 2, \dots, n)$ може бути розрахована за формулою:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}. \quad (1.23)$$

Отримана формула називається *формулою Бейеса* (за прізвищем англійського математика, який її вивів у 1764 р.). Формула Бейеса дозволяє переоцінити ймовірності гіпотез після того, як стає відомим результат дослідження, в результаті якого з'явилась подія A .

Приклад 1.17. Деталі, що були виготовлені цехом заводу, попадають для перевірки їх на стандартність до одного з двох контролерів. Ймовірність того, що деталь попаде до першого контролера, дорівнює 0,6, а до другого – 0,4. Ймовірність того, що деталь буде визначена як стандартна першим контролером, дорівнює 0,94, а другим – 0,98. Деталь при перевірці була визначена як стандартна. Знайти ймовірність того, що цю деталь перевірів перший контролер.

Розв'язок. Позначимо через A подію, що деталь визначена як стандартна. Можна зробити два припущення:

- 1) деталь перевірів перший контролер (гіпотеза B_1),
- 2) деталь перевірів другий контролер (гіпотеза B_2).

Ймовірність того, що деталь перевірів перший контролер, знайдемо за формулою Бейеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}.$$

За умовою маємо: $P(B_1) = 0,6$ (ймовірність того, що деталь попаде до першого контролера); $P(B_2) = 0,4$ (ймовірність того, що деталь попаде

до другого контролера); $P_{B_1}(A) = 0,94$ (ймовірність того, що деталь буде визначена як стандартна першим контролером); $P_{B_2}(A) = 0,98$ (ймовірність того, що деталь буде визначена як стандартна другим контролером). Ймовірність, яку треба визначити, дорівнює:

$$P_A(B_1) = \frac{0,6 \cdot 0,94}{0,6 \cdot 0,94 + 0,4 \cdot 0,98} \approx 0,59.$$

В результаті дослідження ймовірність гіпотези B_1 дорівнює 0,6, а після того, як став відомим результат дослідження, ймовірність цієї гіпотези (точніше умовна ймовірність) змінилася та стала дорівнювати 0,59. Таким чином, використання формули Бейеса дозволило переоцінити ймовірність розглянутої гіпотези.

1.8. Повторення дослідів. Формула Бернуллі

Якщо виконується декілька дослідів, причому ймовірність події A у кожному досліді не залежить від результатів інших, то такі досліді називаються незалежними відносно події A .

У різних незалежних дослідіх подія A може мати або різні ймовірності, або одну й ту ж саму ймовірність. Далі будемо розглядати лише такі незалежні досліді, в яких подія A має одну й ту ж ймовірність.

Нижче будемо використовувати поняття складної події, розуміючи під цим суміщення декількох окремих подій, які будуть називатися простими.

Проводимо n незалежних дослідів, в кожному з яких подія A може з'явитися чи не з'явитися. Будемо вважати, що ймовірність події A у кожному досліді одна й та ж, тобто дорівнює p . Відповідно

ймовірність появи події A в кожному досліді також стала і дорівнює $q = 1 - p$.

Поставимо за мету розрахувати ймовірність того, що при n дослідів подія A з'явиться рівно k разів та, відповідно, не з'явиться $n - k$ разів.

Важливо підкреслити, що не вимагається, щоб подія A повторилася рівно k разів у визначеній послідовності. Наприклад, якщо справа йде про появу події A три рази у чотирьох дослідів, то можливі наступні складні події: $AAA\bar{A}$, $AA\bar{A}A$, $A\bar{A}AA$ та $\bar{A}AAA$. Запис $AAA\bar{A}$ означає, що в першому, другому та третьому дослідів подія A з'явилася, а у четвертому досліді не з'явилася, тобто наступила протилежна подія \bar{A} . Відповідний зміст мають й інші записи. Ймовірність, що шукаємо, будемо записувати як $P_n(k)$. Наприклад, запис $P_5(3)$ означає ймовірність того, що в п'яти дослідів подія з'явилася рівно 3 рази, і, відповідно, не з'явилася 2 рази. Поставлену задачу вирішує так звана формула Бернуллі.

Вивід формули Бернуллі. Ймовірність однієї складної події, що складається з того, що в n дослідів подія A з'являється рівно k разів та не з'являється $n - k$ разів, за теоремою множення ймовірностей незалежних подій, дорівнює $p^k q^{n-k}$. Таких складних подій може бути стільки, скільки можна скласти поєднань з n елементів по k елементах, тобто C_n^k . Так як ці складні події несумісні, то за теорією додавання ймовірностей подій, ця ймовірність дорівнює сумі ймовірностей усіх можливих складних подій. Так як ймовірності усіх цих складних подій однакові, то ймовірність, яку шукаємо, (поява k

разів події A у n дослідах) дорівнює ймовірності однієї складної події, яку потрібно помножити на їх число:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \quad (1.24)$$

Отримана формула називається *формулою Бернуллі*.

Приклад 1.18. Ймовірність того, що використання електроенергії хімічним факультетом на протязі однієї доби не перевищить встановленої норми, дорівнює $p = 0,75$. Знайти ймовірність того, що у найближчі 6 діб використання електроенергії на протязі 4 діб не перевищить норми.

Розв'язок. Ймовірність нормального використання електроенергії на протязі кожних із 6 діб стала та дорівнює $p = 0,75$. Отже, ймовірність перевитрачання електроенергії у кожную добу також стала та дорівнює $q = 1 - p = 1 - 0,75 = 0,25$. Необхідна ймовірність за формулою

Бернуллі дорівнює:
$$P_0(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6!}{4!2!} (0,75)^4 (0,25)^2 = 0,30.$$

Поставимо собі задачу знайти таке значення $k = k_{\max}$, при якому ймовірність $P_n(k)$ - максимальна. Число k_{\max} називають найімовірнішим, якщо ймовірність того, що подія A наступить у цих дослідженнях рівно k_{\max} разів, перевищує (чи хоча б не менша) за ймовірність інших можливих результатів досліджень.

Приклад 1.19. Знайти найімовірніше число появи події A у десяти дослідах, якщо ймовірність появи події A в кожному дослідженні

$$p = \frac{2}{3}.$$

Розв'язок. Використання формули Бернуллі для розрахунків дає наступні значення:

$$P_{10}(0) \approx 0,00002; \quad P_{10}(1) \approx 0,00034; \quad P_{10}(2) \approx 0,00305; \quad P_{10}(3) \approx 0,01626;$$

$$P_{10}(4) \approx 0,05690; \quad P_{10}(5) \approx 0,13656; \quad P_{10}(6) \approx 0,22760 \quad P_{10}(7) \approx 0,26012;$$

$$P_{10}(8) \approx 0,19509; \quad P_{10}(9) \approx 0,08671; \quad P_{10}(10) \approx 0,01734.$$

Ймовірність того, що подія A у десяти дослідах з'явиться рівно 7 разів – більша за ймовірності інших результатів досліджень. Найімовірніше число $k_{\max} = 7$.

Наведений приклад показує, що пошук k_{\max} шляхом багатократного використання формули Бернуллі потребує доволі довгих розрахунків. Природно виникає задача знайти інший, більш простий шлях визначення найімовірнішого числа. Для цього спочатку з'ясуємо, як зміниться ймовірність $P_n(k)$ із зміною k при сталому n . Нехай виконується n незалежних досліджень, в кожному з яких подія A може наступити, чи не наступити. Будемо вважати, що ймовірність появи події A в кожному досліді стала та дорівнює p . Числа n та p , а отже і $q = 1 - p$, вважаються відомими. Переконаємось у тому, що з ростом числа k ймовірність $P_n(k)$ спочатку збільшується, а потім після досягнення найбільшого значення зменшується. З цією метою виражаємо величину відношення $\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ через числа n, p, q, k :

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q}.$$

Розглянемо три можливі випадки. Нехай $P_n(k+1) > P_n(k)$, тоді $k < np - q$, тобто, поки ціле число k зростаючи, залишається меншим за

число $np - q$, зростає ймовірність $P_n(k)$. При $k = np - q$ $P_n(k+1) = P_n(k)$. Таким чином, якщо ціле число k дорівнює числу (обов'язково цілому) $np - q$, то ймовірності того, що подія A наступить k , чи $k+1$ разів у n дослідах, дорівнюють одна одній. Оскільки p та q менші за одиницю, то число $np - q$ лише у рідких випадках буде цілим. Отже, випадок, що був розглянутий, є „винятковим”. При $k > np - q$ $P_n(k+1) < P_n(k)$, отже, якщо k перевищує $np - q$, то з ростом k відповідне значення $P_n(k)$ зменшується (до $P_n(n)$).

Таким чином, з ростом числа k ймовірності $P_n(k)$ підвищуються (при $k < np - q$), потім вони зменшуються (при $k > np - q$). Якщо ж число $k = np - q$ ціле, то при збільшенні „виняткового значення” на одиницю, ймовірності $P_n(k)$ та $P_n(k+1)$ однакові.

Використовуючи визначення найімовірнішого числа, отримуємо, що при $k = k_{\max}$ ймовірність $P_n(k_{\max})$ досягає найбільшого значення, а при $k > k_0$ ймовірність $P_n(k)$ зменшується. Якщо $np - q$ не є цілим числом, то можна записати нерівність: $P_n(k_0 + 1) < P_n(k_0)$. При цьому, як було показано вище, $k_0 > np - q$. Якщо ж k_0 приймає „виняткове значення”, що дорівнює $np - q$, то $P_n(k+1) = P_n(k)$. Значить, у загальному випадку має місце нерівність $P_n(k_0 + 1) \leq P_n(k_0)$, яка визначає наступну нерівність:

$$k_0 \geq np - q \quad (1.25).$$

Вираз (1.25) дає нижню межу для числа k_{\max} . Аналогічні міркування показують, що нерівність $P_n(k_{\max} - 1) < P_n(k_{\max})$ дає нерівність:

$$k_0 < np + p \quad (1.26),$$

яке дає верхню межу числа k_{\max} . Якщо об'єднати (1.25) та (1.26), то отримуємо:

$$np - q \leq k_{\max} < np + p \quad (1.27).$$

Ця подвійна нерівність і слугує для визначення найімовірнішого числа.

Зауваження 1. Незалежно від того, чи є число $np - q$ цілим, чи ні, різниця чисел $np + p$ та $np - q$ дорівнює одиниці: $(np + p) - (np - q) = p + q = 1$.

Із цього зауваження можна зробити наступні висновки:

- а) якщо число $np - q$ не є цілим, то подвійна нерівність (1.27) визначає одне значення k_{\max} (у проміжку поміж двома нецілими значеннями, що відрізняються на одиницю, існує лише одне ціле число);
- б) якщо число $np - q$ є цілим, то подвійна нерівність (1.27) визначає два значення найімовірнішого числа; позначимо менше з них через k_{\max} , а більше з них через $k_{\max} + 1$.

Зауваження 2. Якщо добуток np є цілим числом, то k_{\max} дорівнює np . Це твердження виходить із подвійної нерівності (1.27).

Зауваження 3. Не треба думати, що ймовірність $P_n(k)$ найімовірнішого числа появи події має велике значення. Наприклад, якщо монету кинути 100 разів, то найімовірніше число появи герба дорівнює $k_{\max} = 100 \cdot 0,5 = 50$. Ймовірність же $P_{100}(50)$ дорівнює лише 0,08.

Приклад 1.20. Проводять 6 незалежних досліджень, в кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює $p = 0,2$. Знайти найімовірніше число появи події A .

Розв'язок. Найімовірніше число появи події A знайдемо із подвійної нерівності: $np - q \leq k_{\max} < np + p$. Приймаючи за умовою, що $n = 6$; $p = 0,2$; $q = 1 - 0,2 = 0,8$, отримуємо: $6 \cdot 0,2 - 0,8 \leq k_{\max} < 6 \cdot 0,2 + 0,2$. Звідки маємо: $0,4 \leq k_{\max} < 1,4$. Поміж числами 0,4 та 1,4 знаходиться лише одне ціле число - одиниця. Тому найімовірніше число появи події A дорівнює $k_{\max} = 1$.

Питання для самостійного повторення

Замість крапок запишіть таке продовження тексту, щоб отримати правильне означення або твердження. Де можливо запишіть відповідну формулу.

1. Теорія ймовірностей – це...
2. Подія – це...
3. Випадкової події є те, що...
4. Вірогідною називається подія, яка ...
5. Неможливою називається подія, яка ...
6. Події A і B називаються рівноймовірними, якщо...
7. Статистична частота це...

8. Теорема Бернуллі стверджує, що...
9. Сумою двох подій A і B називається подія, яка полягає в тому, що ...
10. Несумісні події це ...
11. Теорема додавання несумісних подій стверджує, що...
12. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює...
13. Для повної групи подій справедливе рівняння...
14. Принцип практично неможливих малоймовірних подій полягає у...
15. Дві події називаються незалежними, якщо ...
16. Добутком двох сумісних подій A та B називається...
17. Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює...
18. Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називається...
19. Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює...
20. Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює...
21. Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює...
22. Формулу повної ймовірності можна записати як...
23. Гіпотезами називають...
24. Формулу Бейеса можна записати як...
25. Формулу Бернуллі можна записати як...

Задачі для самостійного розв'язку

1. Якщо монету підкинули 100 разів та 53 рази випав герб, то яка статистична частота появи герба?

Відповідь: $p = 0,53$.

2. В коробці лежить 5 білих та 6 чорних куль. З коробки виймають навмання одну кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля буде білою.

Відповідь: $p = 0,45$.

3. В коробці лежить 5 білих та 6 чорних куль. З коробки виймають одну кулю та відкладають її в сторону. Вийнята куля була білою. Після цього з коробки беруть ще одну кулю. Знайти ймовірність того, що друга вийнята куля теж біла.

Відповідь: $p = 0,4$.

4. В коробці лежать 4 білих та 6 чорних куль. З коробки виймають відразу дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі, що вийняли з коробки, були білими.

Відповідь: $p = 0,133(3)$.

5. В коробці лежать 7 білих та 5 чорних куль. З коробки виймають відразу 5 куль. Знайти ймовірність того, що дві з них будуть білими, а три – чорними.

Відповідь: $p = 0,265$.

6. Взяли 10 перших літер англійської абетки. Скільки умовних слів з трьох літер можна скласти?

Відповідь: $C_{10}^3 = 120; A_{10}^3 = 720$.

7. Взяли 10 перших літер англійської абетки. Яка ймовірність того, що будь – яке слово з трьох літер буде мати літеру „b”?

Відповідь: $p_1 = 0,3; p_2 = 0,1$.

8. З партії, що складається з 10 виробів, серед яких „3” браковані, виймають три вироби для перевірки. Знайти ймовірність таких подій: $A = \{ \text{у виборці знаходиться один бракований виріб} \}$; $B = \{ \text{у виборці знаходиться хоча б один бракований виріб} \}$; $C = \{ \text{у виборці відсутні браковані вироби} \}$; $D = \{ \text{у виборці знаходяться два браковані вироби} \}$; $E = \{ \text{у виборці знаходяться всі браковані вироби} \}$.

Відповідь: $p_1 = 0,525$;

$$p_2 = 0,708;$$

$$p_3 = 0,292;$$

$$p_4 = 0,175;$$

$$p_5 = 0,0083.$$

9. Серед кандидатів в студентську раду факультету 3 першокурсника, 5 другокурсників, 7 третьокурсників. З цього складу вибирають 5 студентів. Знайти ймовірність таких подій: $A = \{ \text{будуть вибрані першокурсники} \}$; $B = \{ \text{будуть вибрані третьокурсники} \}$; $C = \{ \text{буде вибрано такий склад: 1 першокурсник; 2 другокурсника; 2 третьокурсника} \}$.

Відповідь: $p_1 = 0,022$;

$$p_2 = 0,007;$$

$$p_3 = 0,21.$$

10. З п'яти літер абетки складено слово „КНИГА”. Малюк, який не вміє читати, розсипав усі літери, а потім знову склав їх будь-як.

Знайти ймовірність того, що в малюка знову вийде слово „КНИГА”.

Відповідь: $p = 0,0083$.

11. Малюк розкидав слово „АНАНАС”. Знайти ймовірність того, що у малюка знову вийде слово „АНАНАС”.

Відповідь: $p = 0,017$.

12. З пової колоди карт (52 карти, 4 масті) витягають декілька карт. Скільки карт необхідно витягнути для того, щоб з ймовірністю більшою за 0,5 стверджувати, що серед них будуть хоча б дві карти однакової масті?

Відповідь: 3 або більше карт.

13. У розіграші першості з баскетболу приймають участь 18 команд, з яких випадково формують дві групи по 9 команд у кожній. Серед учасників змагань 5 команд екстракласу. Знайти ймовірність таких подій: $A = \{\text{всі команди екстракласу опинились в одній групі}\}$; $B = \{\text{дві команди екстракласу опинились в одній групі, а три – в іншій}\}$.

Відповідь: $p(A) = 0,0294$;

$P(B) = 0,7059$.

14. Дехто купив карточку грошової лотереї і відмітив 6 номерів з 49. Після цього відбувся розіграш тиражу 6 з 49. Знайти ймовірність таких подій: $A_3 = \{\text{правильно відгадано 3 номери з 6}\}$; $A_4 =$

{правильно відгадано 4 номери з 6}; $A_5 = \{\text{правильно відгадано 5 номери з 6}\}$; $A_6 = \{\text{правильно відгадано 6 номери з 6}\}$.

Відповідь: $p(A_3) = 1,76 \cdot 10^{-2}$;

$$p(A_4) = 9,7 \cdot 10^{-4};$$

$$p(A_5) = 1,8 \cdot 10^{-5};$$

$$p(A_6) = 7,1 \cdot 10^{-8}.$$

15. Десять осіб розташувалися за круглим столом. Знайти ймовірність того, що дві фіксовані особи А і В опиняться поряд.

Відповідь: $p = 0,22$.

16. Дослід складається з чотирикратного вибору з поверненням однієї літери абетки (будь – якої): $A = \{a, v, k, o, m\}$ та викладенні слова у порядку появи літер. Яка ймовірність того, що у наслідку буде написано слово „МАМА”?

Відповідь: $p = 1,6 \cdot 10^{-3}$.

17. У комп'ютерному класі працює чотири комп'ютери. Для кожного комп'ютера ймовірність того, що він працює в робочий час, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що в даний час (робочі години) працює хоча б один комп'ютер.

Відповідь: $p = 0,9999$.

18. Для сигналізації про аварію встановлені дві незалежно працюючі системи. Ймовірність того, що про аварію сповістить перша

система 0,95, а друга – 0,9. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює хоча б одна сигналізація.

Відповідь: $p = 0,995$.

19. Підкидають дві гральні кості, грані яких мають числа 1,2,3,4 (трикутні піраміди). Знайти ймовірність того, що номер „4” з’явиться хоча б на одній грані (ця грань знаходиться на дощиці).

Відповідь: $p = 0,437$.

20. На полиці стоїть 15 книжок, 5 з них з хімії. Бібліотекар бере навмання 3 книги. Знайти ймовірність того, що хоча б одна книга буде з хімії.

Відповідь: $p = 0,736$.

21. В коробці лежить 10 деталей, з яких 4 забарвлені. Робочий навмання взяв 3 деталі. Знайти ймовірність того, що хоча б одна деталь буде забарвлена.

Відповідь: $p = 0,83$.

22. В коробці знаходяться 6 однакових занумерованих кубиків. Навмання по одному виймають усі кубики. Знайти ймовірність того, що номери кубиків, що виймають, з’являться в зростаючому порядку.

Відповідь: $p = 1,4 \cdot 10^{-3}$.

23. У штативі 20 пробірок, які мають номери від 101,102.....до 120, розставлені в довільному порядку. Студент навмання виймає дві пробірки. Знайти ймовірність, що будуть вийняті пробірки з номерами 101 і 120.

Відповідь: $p = 5,3 \cdot 10^{-3}$.

24. Ймовірність того, що витрати електроенергії протягом однієї доби не перевищать встановленої норми, дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що в наступні 6 діб витрати електроенергії протягом 4 діб не перевищать норми.

Відповідь: $p = 0,296$.

25. Статистично встановлено, що з кожної тисячі народжених немовлят у середньому 485 дівчат та 515 хлопчиків. В родині 5 дітей. Знайти ймовірність того, що серед цих дітей: а) три дівчинки; б) не більше трьох дівчат; в) не менше двох, але не більше чотирьох дівчат.

Відповідь: $p_a = 0,302$;

$p_b = 0,831$;

$p_v = 0,766$.

26. Знайти найімовірніше число появи події А в десяти дослідах, якщо ймовірність появи А в кожному досліді $p = 2/3$.

Відповідь: 7.

27. Знайти найімовірніше число появи події А в п'яти дослідах, якщо ймовірність появи А в кожному досліді $p = 2/3$.

Відповідь: 3;4.

28. Проводиться 19 пострілів з гвинтівки. Ймовірність влучення в ціль при кожному пострілі 0,8. Знайти найімовірнішу кількість влучень в ціль.

Відповідь: 15;16.

29. Чому дорівнює ймовірність появи події А в кожному досліді, якщо найімовірніше число появи А в 100 незалежних дослідах дорівнює 20?

Відповідь: $p = 0,2$.

30. Перший прилад складається з n_1 вузлів, а другий – з n_2 вузлів. Кожний прилад працював протягом t годин. За цей час кожен вузол першого приладу виходить з ладу незалежно один від одного з ймовірністю p_1 , другого – з p_2 . Знайти ймовірність P того, що за t годин в першому приладі вийде з ладу m_1 вузлів, а в другому – m_2 .

Відповідь: $P = C_{n_1}^{m_1} p_1^{m_1} (1 - p_1)^{n_1 - m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} p_2^{m_2} (1 - p_2)^{n_2 - m_2}$.

31. При кожному циклі обзору радіолокаційною станцією, яка слідкує за космічними об'єктами, об'єкт виявляється з ймовірністю p . Виявлення об'єкту в кожному циклі проходить незалежно один від

одного. Знайти ймовірність того, що при n циклах об'єкт буде виявлено.

$$\text{Відповідь: } P = 1 - (1 - p)^n.$$

32. Маємо m радіолокаційних станцій, кожна з яких за один цикл спостережень виявляє об'єкт з ймовірністю p (незалежно від інших циклів та станцій). За час t кожна станція встигає зробити n циклів. Знайти ймовірність таких подій: а) $A = \{\text{об'єкт буде виявлено кожною станцією}\}$; б) $B = \{\text{об'єкт буде виявлено хоча б однією станцією}\}$.

Відповідь:

$$p(A) = [1 - (1 - p)^n]^m;$$
$$p(B) = 1 - [(1 - p)^n]^m.$$

33. Маємо групу з k космічних об'єктів, кожний з яких незалежно від інших виявляється радіолокаційними станціями з ймовірністю p . За групою об'єктів ведуть спостереження незалежно одна від одної m радіолокаційних станцій. Знайти ймовірність того, що не всі об'єкти, які входять у групу, будуть виявлені.

$$\text{Відповідь: } p(A) = 1 - [1 - (1 - p)^m]^k.$$

ГЛАВА 2

ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

2.1. Визначення випадкової величини. Біноміальне розподілення

Випадковою називають величину, яка в результаті досліджень приймає тільки одне із можливих, наперед невідомих значень та залежить від випадкових причин, які заздалегідь не можуть бути враховані. Будемо далі позначати випадкові величини літерами: $X, Y, \dots; x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m$.

Дискретною (переривчастою) називають випадкову величину, яка може приймати окремі, ізольовані значення із визначеною ймовірністю.

Дискретна випадкова величина у результаті дослідів може отримати будь-яке із своїх значень, але хоча б одне з них буде мати обов'язково. Тому сукупність усіх значень дискретної випадкової величини складають повну групу подій:

Приклад 2.1. Кількість очок на кубуку – це випадкова дискретна величина, яка може приймати значення: $X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4, X_5 = 5, X_6 = 6$. Ці події рівноймовірні та мають $p_i = 1/6$. При киданні кубика завжди з'являється одне з цих чисел, тому ці події складають повну групу.

Для повної групи подій справедливе рівняння (1.10), яке можна записати у такому вигляді:

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1. \quad (2.1)$$

Для дискретної випадкової величини рівняння (2.1)) називається умовою нормування випадкової величини. Це означає, що якими б не були ймовірності окремих значень даної дискретної випадкової величини їх сума завжди дорівнює одиниці.

Законом розподілення дискретної випадкової величини називають перелік усіх можливих її значень та їх ймовірностей. Закон розподілення дискретної випадкової величини можна надати у вигляді таблиці, перша графа якої містить усі можливі значення випадкової величини, а друга – відповідні значення ймовірності. Закон розподілення дискретної випадкової величини можна також задати в аналітичному вигляді. Наприклад, якщо дискретною випадковою величиною є число k появи події у n дослідах, то для визначення ймовірності можна використати відому вже формулу Бернуллі (1.24). Праву частину цього рівняння можна розглядати як загальний член розкладу бінома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + C_n^0 q^n.$$

Цей закон розподілення називають біноміальним. Тут перший член розкладу p^n визначає появу бажаної події n разів у n незалежних дослідах, другий член $n p^{n-1} q$ визначає ймовірність появи події $(n-1)$ разів, останній член q^n визначає ймовірність того, що подія не з'явиться жодного разу. Таким чином, ймовірність усіх можливих значень k знайдена. Цей закон розподілення (числа появи події у n дослідах) можна надати і у вигляді таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

k	k	$n-1$	k		
P (k)	P	np^n	$C_n^k p^k$		

Нарешті закон розподілення дискретної випадкової величини можна задати *графічно*. У наступному прикладі показано всі види представлення закону розподілення дискретної випадкової величини.

Приклад 2.2. Чотири рази кидаємо монету. Знайти закон розподілення для числа появи решки.

Розв'язок. Це біноміальне розподілення при $n=4$, $p = q = 1/2$.

Таблиця 2.2

k	0	1	2	3	4
$P_n(k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

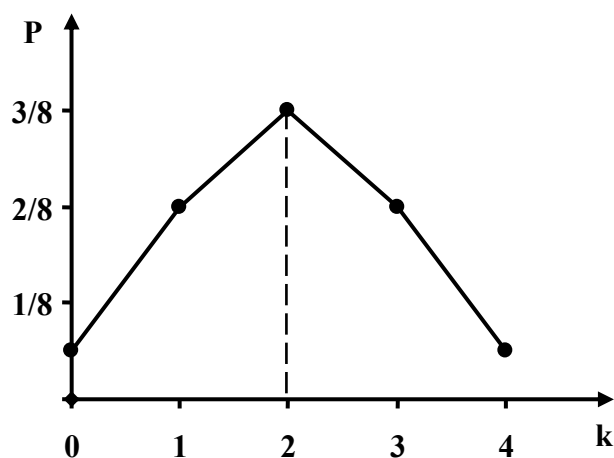


Рис.2.1. Графічне представлення закону розподілення дискретної випадкової величини

На рис. 2.1 це розподілення представлено графічно, утворюючи так званий *багатокутник розподілення*.

Д. Дауден застосував біноміальне розподілення для інтерпретації даних перебігу гетерогенно-каталітичних реакцій на гомогенних металічних сплавах-каталізаторах. За моделлю Даудена, сплав є статистичною сукупністю кластерів (ансамблів) різного складу. Якщо у бінарному сплаві (АВ) існують кластери з n атомів, що містять k атомів певного компоненту А, то імовірність (P_n^k) утворення таких кластерів дається біноміальним розподіленням:

$$P_n^k = C_n^k x_A^k (1 - x_A)^{n-k} . \quad (2.2)$$

Тут замість ймовірності p формули (1.24) фігурує x_A - мольна частка компоненту А у сплаві, яка, як і ймовірність, змінюється від нуля до одиниці.

За $k = n$, тобто, якщо максимальну активність мають кластери, що складаються з атомів лише одного сорту, активність сплаву (a) пропорційна:

$$P_n = x_A^n = \frac{a}{a_0} , \quad (2.3)$$

де a_0 – активність чистого компоненту А.

Побудувавши графік в координатах $\lg \frac{a}{a_0} - \lg x_A$, можна знайти n – число атомів у кластері. Подібна ситуація реалізується, наприклад, при

проведенні реакції синтезу аміаку на Fe-Ni сплавах, де нікель є інертним у каталізі компонентом. Оцінка величини n за експериментальними даними з каталітичної активності Fe-Ni сплавів в області гомогенності дала для середнього значення $n \cong 6 - 7$ атомів. Це показує, що активним центром у реакції синтезу аміаку є група атомів у поверхневому шарі каталізатора.

Якщо у якійсь реакції переважно працюють кластери певного складу, що мають k атомів компоненту A , то каталітична активність пропорційна P_n^k і на кривій залежності активності від складу сплаву з'являється максимум, положення якого на осі абсцис визначається співвідношенням:

$$x_A^{\max} = k/n . \quad (2.4)$$

Для Fe-Co сплавів-каталізаторів на залежності активності у реакції синтезу аміаку від складу (рис. 2.2) є яскраво виражений максимум при 14 % Co, отже $x_A^{\max} = 0,14$.

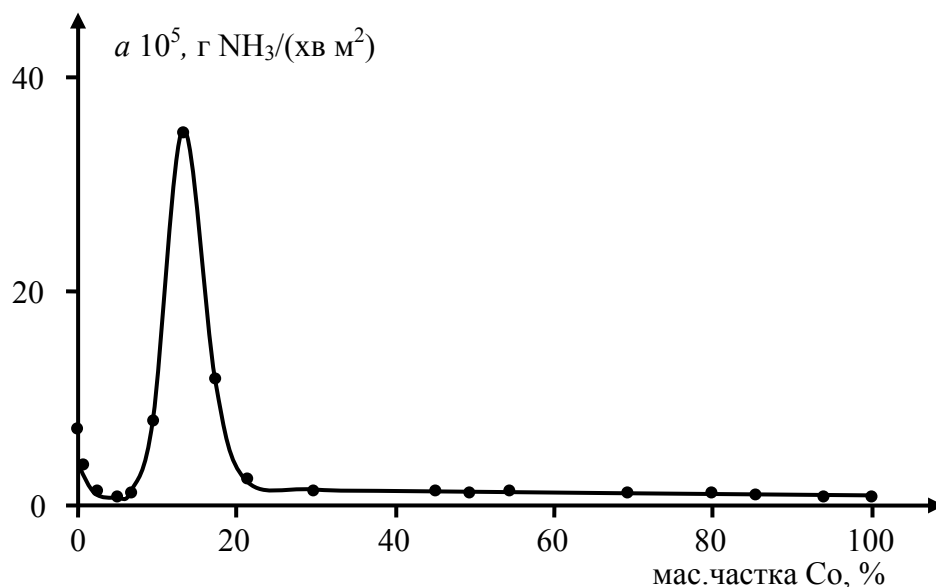


Рис. 2.2. Залежність каталітичної активності Fe-Co сплавів у реакції синтезу аміаку від їх складу.

При $n = 7$ це відповідає одному атому кобальту на 6 атомів заліза, тобто оптимальними є кластери складу Fe_6Co . Виявилося, що саме такі кластери мають оптимальні електронні і хемосорбційні характеристики для найкращого перебігу реакції синтезу аміаку.

Співвідношення (2.4) можна використати для передбачення оптимального складу каталізатора-сплаву, якщо є міркування щодо складу активного ансамблю. Наприклад, у реакції окиснення CO молекулярним киснем є стадія хемосорбції CO. Було виявлено, що багатоцентрова, „місткова” форма хемосорбції CO є міцною, хемосорбовані у такій формі молекули CO блокують поверхню каталізатора і гальмують процес окиснення CO. Така форма є характерною для каталізаторів - перехідних металів: Pd, Pt, Ni тощо. Якщо брати сплави цих металів з металом, що не хемосорбує CO, а хемосорбує лише кисень, наприклад, зі сріблом, то можна прийти до висновку, що оптимальними повинні бути кластери, у яких окремий атом перехідного металу, зокрема паладію, знаходиться в оточенні атомів срібла. Це виключає міцну багатоцентрову хемосорбцію карбон монооксиду, бо CO на цих кластерах може хемосорбуватися лише у слабкій одноточковій формі, що сприяє каталізу. Таким чином, $k = 1$, і, знаходячи $n = 9-10$ із структурних кристалохімічних даних, маємо згідно формули (2.4) $x_{Pd}^{opt} = 0,10 - 0,11$. Експериментальні дослідження виявили, що найбільш активні паладій-срібні каталізатори окиснення CO містять від 5 до 15% Pd, що добре узгоджується з передбаченим значенням x_{Pd}^{opt} .

2.2. Закон розподілення Пуассона

Якщо в наведеному вище біноміальному законі ймовірність події має дуже мале значення ($p \leq 0,1$), то в цих випадках біноміальне розподілення перетворюється на розподілення Пуассона. Зробимо

припущення, що добуток np зберігає сталі значення, тобто $np = \nu$, де ν - деяка стала (далі буде показано, що це припущення означає, що середнє число появи події A у різних серіях дослідів (при різних значеннях n) є сталою величиною).

З формули Бернуллі маємо:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Оскільки $np = \nu$, то $p = \frac{\nu}{n}$, отже:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} \left(\frac{\nu}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{n-k}$$

Знайдемо тепер $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k)$.

$$\begin{aligned} P_n(k) &\approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} \cdot \frac{\nu^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{\nu^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{n-k} \right] = \frac{\nu^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{-k}. \end{aligned}$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^n = e^{-\nu}$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{-k} = 1$, то отримуємо:

$$P_n(k) = \frac{\nu^k \cdot e^{-\nu}}{k!}. \quad (2.5)$$

Ця формула виражає закон розподілення Пуассона, який ще називають "законом рідкісних подій".

Це розподілення, зокрема, було використано у гетерогенному каталізі при тлумаченні активності нанесених каталізаторів при дуже малій концентрації каталітично активного металу, нанесеного на носій-адсорбент. В цьому випадку на поверхні носіїв знаходяться вже не мікрочастинки, а дуже невеличкі групи атомів, які Н.І.Кобозев запропонував називати *ансамблями*. Він звернув увагу на те, що за збільшення кількості нанесеного металу на носії при дуже малих концентраціях активність (A) нанесеного каталізатора проходить через максимум, як це зображено на рис. 2.3.

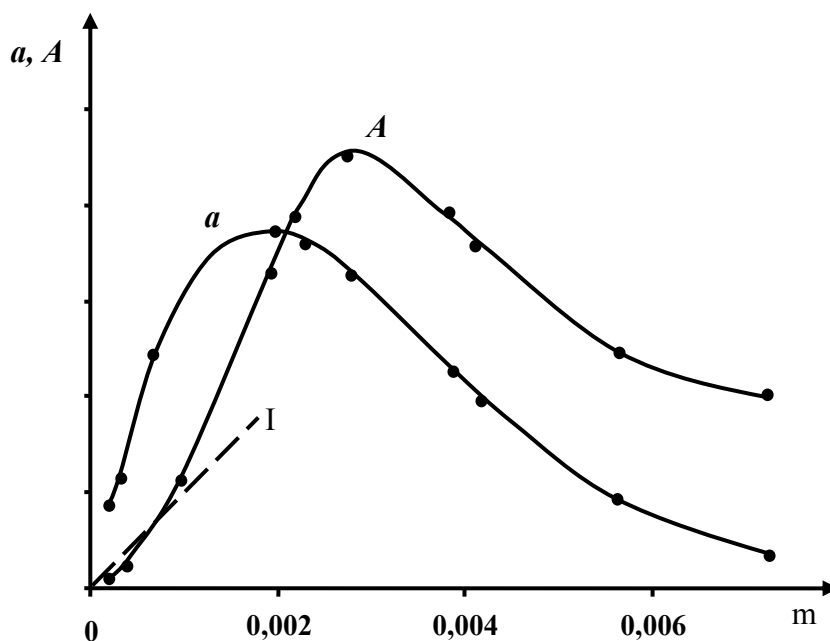


Рис. 2.3. Залежність активності (A) та питомої активності (a) нанесеного каталізатора від кількості (m) нанесеного металу.

Якби каталітична реакція була індиферентна до виду активних центрів-ансамблів, то активність нанесеного каталізатора була б пропорційна кількості каталітично активної маси (цей випадок описує пряма I на рис. 2.3). Наявність максимуму свідчить про те, що носіями каталітичної активності є ансамблі певного розміру, які складаються з

певної кількості атомів - k . Інакше кажучи, якщо позначити активність i -того ансамблю через r_i , то всі r_i прямують до нуля за $i \neq k$.

Запропонована Н.І.Кобозевим теорія ансамблів дає можливість обчислити величину k з експериментальних даних. Вважається, що на поверхні носія є певні комірки - ділянки міграції, у кожній з яких є певна кількість атомів k , що складають k -атомний ансамбль. Між комірками існують бар'єри, що не дозволяють атомам переходити з однієї ділянки міграції до іншої. Розподілення атомів каталітично активного металу по комірках визначається законами статистики. Оскільки концентрація нанесеного металу є дуже малою, то можна застосувати закон рідкісних подій - розподілення Пуассона. Згідно з цим розподіленням імовірність (p_k) утворення k -атомного ансамблю дорівнює:

$$p_k = \frac{v^k}{k!} e^{-v}, \quad (2.6)$$

де v - середня кількість атомів у комірці.

v пов'язана з масою m нанесеного металу простим співвідношенням:

$$m = v \cdot N \cdot g_a = const \cdot v, \quad (2.7),$$

де N - кількість комірок на поверхні носія, g_a - маса атома металу.

Активність A каталізатора, що містить ансамблі з k атомів, дорівнює:

$$A = r_k p_k. \quad (2.8).$$

Положення максимуму на кривій залежності A від m визначається умовою $dA/dm = 0$. Оскільки m є пропорційною v , а $A - p_k$, то ця умова переходить у $dp_k/dv = 0$. Відповідно до цієї умови з рівняння (2.6) маємо:

$$v_A^{max} = k . \quad (2.9).$$

Проте з графіка залежності A від m (рис.2.3) маємо не v_A^{max} , а лише пропорційну їй величину m_A^{max} . Додатково можна використати положення максимуму залежності від маси нанесеного металу питомої активності a , що визначається відношенням A до m . Отже, маємо:

$$a = \frac{A}{m} = \frac{r_k p_k}{v N m_A} = \text{const} \frac{v^{k-1}}{k!} e^{-v} \quad (2.10),$$

і з умов $da/dm=0$ і, відповідно, $da/dv=0$ знаходимо:

$$v_a^{max} = k - 1 . \quad (2.11).$$

З рівностей (2.7), (2.9) та (2.11) знаходимо:

$$k = \frac{v_A^{max}}{v_A^{max} - v_a^{max}} = \frac{m_A^{max}}{m_A^{max} - m_a^{max}} . \quad (2.12).$$

Дослідження активності нанесених каталізаторів у реакціях різного типу показало, що реакції гідрування - дегідрування перебігають на двохатомних ансамблях, у реакціях окиснення типове значення $k = 1$ (зазначимо, що при цьому $m_a^{max}=0$, тобто, на кривій $a=f(m)$ максимум збігається з віссю ординат). Таким чином, через застосування

розподілення Пуассона теорія ансамблів дозволяє визначити кількість атомів, що складають активний центр.

2.3. Безперервна випадкова величини

Безперервною називають випадкову величину, яка може приймати всі значення в деякому кінцевому чи нескінченному проміжку. Число можливих значень безперервної випадкової величини є нескінченим. Скласти таблицю, в якій були б перераховані всі можливі значення такої випадкової величини, неможливо. Для характеристики безперервної випадкової величини (X) замість ймовірності користуються деякою функцією від x , яка називається *густиною розподілення* випадкової величини та позначається $f(x)$.

Для безперервної випадкової величини має сенс не ймовірність у точці, а лише ймовірність її знаходження в інтервалі $(a \leq x \leq b)$ (рис.2.4):

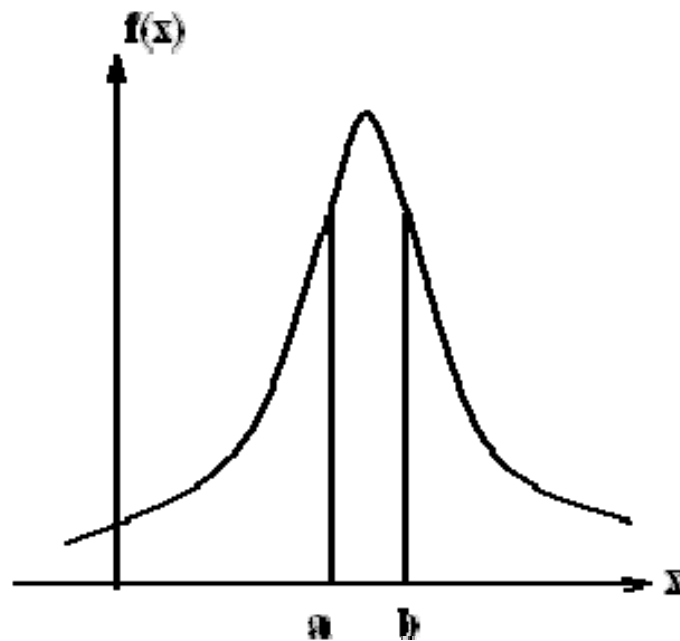


Рис. 2.4. Розподілення безперервної випадкової величини.

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad (2.13)$$

Ймовірність попадання безперервної випадкової величини на нескінченно великий відрізок є подією вірогідною і дорівнює одиниці, отже умова нормування, яка для дискретної випадкової величини визначалася формулою (2.1), для безперервної випадкової величини набуває вигляду:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (2.14)$$

Одним з найбільш простих законів розподілення для безперервної випадкової величини є закон *рівномірної густини*.

Для цього закону:

$$f(x) = C = \text{const} \text{ при } a < x < b; \quad f(x) = 0 \text{ при } x < a \text{ та } x > b.$$

Константу C знаходимо з умов нормування (2.14):

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_a^b C dx = C(b-a),$$

звідки

$$C = \frac{1}{b-a}.$$

(площина прямокутника " $abcd$ " на рис.2.5 дорівнює одиниці).

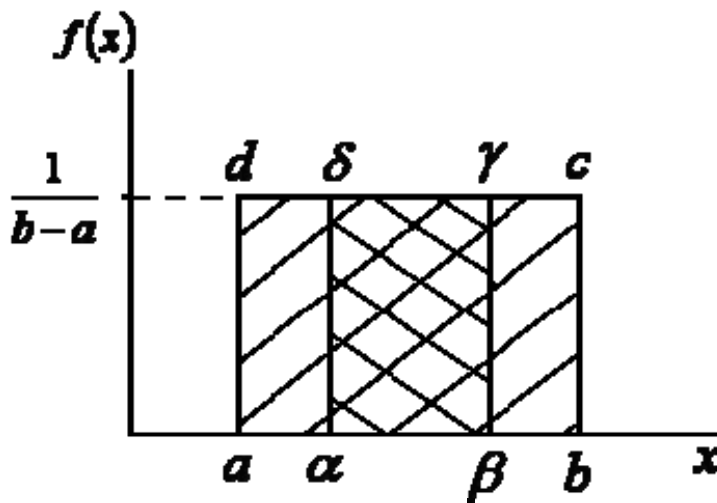


Рис. 2.5. Закон рівномірної густини

Імовірність попадання випадкової величини на відрізок $\alpha < x < \beta$ дорівнює:

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{b-a} \int_{\alpha}^{\beta} dx = \frac{\beta - \alpha}{b-a} \quad (2.15)$$

Ця ймовірність, як це видно з рис.2.5, дорівнює площині прямокутника " $\alpha\beta\gamma\delta$ ".

Приклад 2.3. Потяги метро йдуть з інтервалом у 2 хв. Знайти ймовірність очікування потягу протягом 15 сек.

Розв'язок. В цьому випадку $b - a = 120$ сек, $\beta - \alpha = 15$ сек. Отже $P(\alpha < x < \beta) = 15/120 = 0,125$.

Приклад 2.4. Знайти ймовірність попадання у сектор від 0 до 90° при грі у рулетку.

Розв'язок. В цьому випадку $b - a = 360^\circ$, $\beta - \alpha = 90^\circ$. Отже $P(\alpha < x < \beta) = 90/360 = 0,25$.

У кожного розподілення ймовірності є свої *числові характеристики*, найбільш важливими з яких є математичне сподівання та дисперсія.

2.4. Математичне сподівання випадкової величини

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини визначається як сума добутків усіх її можливих значень на їх ймовірності.

Нехай випадкова величина X приймає значення x_1, x_2, \dots, x_n , ймовірності яких відповідно дорівнюють p_1, p_2, \dots, p_n .

Тоді математичне сподівання $M[X]$ випадкової величини X визначається таким чином:

$$M[X] = m_x = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (2.16)$$

Приклад 2.5. Знайти математичне сподівання для дискретних величин, які підкоряються біноміальному розподіленню ($p = q = \frac{1}{2}$), при: а) $n = 2$ та б) $n = 4$

$$\text{Розв'язок. а) } m_x^a = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1;$$

$$\text{б) } m_x^b = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 2.$$

Приклад 2.6. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини, яка підкоряється розподіленню Пуассона.

Розв'язок.

$$M[k] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\nu} \nu^k}{k!} = e^{-\nu} \cdot \nu \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^{k-1}}{(k-1)!}}_{e^{\nu}} = e^{-\nu} \cdot \nu \cdot e^{\nu} = \nu. \quad (2.17)$$

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює її значенню:

$$M[C] = C \quad (2.18)$$

Доведення. Будемо розглядати сталу C як дискретну випадкову величину, яка приймає значення, що дорівнює C , із ймовірністю $p = 1$.

Математичне сподівання дорівнює добутку можливих значень на їх ймовірність:

$$M[C] = C \cdot 1 = C$$

2. Математичне сподівання добутку сталої величини на випадкову дорівнює добутку сталої величини на математичне сподівання випадкової величини:

$$M[CX] = C \cdot M[X] \quad (2.19)$$

Доведення. Нехай випадкова величина задається законом розподілення ймовірностей:

X	x_1	x_2	\dots	x_n
p	p_1	p_2	\dots	p_n

Зрозуміло, що величина CX також можна розглядати як випадкову з можливими значеннями Cx_1, Cx_2, \dots, Cx_n .

Які ймовірності цих можливих значень? Для того, щоб величина CX прийняла значення Cx_1 , необхідно і достатньо, щоб величина X прийняла значення x_1 . Ймовірність цієї події дорівнює p_1 , отже, і ймовірність того, що CX прийме значення Cx_1 також дорівнює p_1 . Аналогічно розраховуються ймовірності і для інших значень. Таким чином, закон розподілення випадкової величини CX наступний:

CX	Cx_1	Cx_2	\dots	Cx_n
p	p_1	p_2	\dots	p_n

Математичне сподівання випадкової величини CX дорівнює:

$$\begin{aligned} M[CX] &= Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \dots + Cx_np_n = \\ &= C(x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n) = CM[X] \end{aligned}$$

3. Математичне сподівання алгебраїчної суми двох випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі математичних сподівань цих величин:

$$M[X \pm Y] = M[X] \pm M[Y] \quad (2.20)$$

Доведення. Нехай випадкові величини X та Y задаються законами розподілення ймовірностей:

X	x_1	x_2	Y	y_1	y_2
p	p_1	p_2	g	g_1	g_2

Складемо всі можливі $X + Y$, для чого до кожного можливого значення X додамо кожне можливе значення Y та отримуємо $x_1 + y_1, x_1 + y_2, x_2 + y_1, x_2 + y_2$. Позначимо ймовірності цих значень відповідно через p_{11}, p_{12}, p_{21} та p_{22} .

Математичне сподівання величини $X + Y$ дорівнює сумі добутку можливих значень на їх ймовірності:

$$\begin{aligned} M[X + Y] &= (x_1 + y_1)p_{11} + (x_1 + y_2)p_{12} + \\ &+ (x_2 + y_1)p_{21} + (x_2 + y_2)p_{22} \end{aligned}$$

чи можна записати:

$$M[X + Y] = x_1(p_{11} + p_{12}) + x_2(p_{21} + p_{22}) + y_1(p_{11} + p_{21}) + y_2(p_{12} + p_{22})$$

Доведемо, що $p_{11} + p_{12} = p_1$. Подія, що складається з того, що X набуде значення x_1 (ймовірність цієї події дорівнює p_1), тягне за собою подію, яка складається з того, що $X + Y$ набуде значення $x_1 + y_1$ чи $x_1 + y_2$ (ймовірність цієї події дорівнює $p_{11} + p_{12}$) і навпаки. З цього можна записати $p_{11} + p_{12} = p_1$.

Аналогічно доводяться рівності:

$$p_{21} + p_{22} = p_2, \quad p_{11} + p_{12} = g_1 \text{ та } p_{12} + p_{22} = g_2.$$

Якщо підставити останні рівняння у передостаннє, то отримуємо:

$$M[X + Y] = (x_1 p_1 + x_2 p_2) + (y_1 g_1 + y_2 g_2)$$

Тобто:

$$M[X + Y] = M[X] + M[Y]$$

Враховуючи доведену властивість, можна записати:

$$M[X - Y] = M[X + (-Y)] = M[X] + M[-Y] = M[X] - M[Y]$$

Отже, $M[X \pm Y] = M[X] \pm M[Y]$

4. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин (або кількох взаємно незалежних випадкових величин) дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y] \quad (2.21)$$

Доведення. Нехай незалежні випадкові величини X та Y задаються власними законами розподілення ймовірностей:

X	x_1	x_2	Y	y_1	y_2
p	p_1	p_2	g	g_1	g_2

Складемо всі значення, які може приймати випадкова величина XU , для чого перемножимо всі можливі значення X на кожне можливе значення Y та отримуємо: x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1 та x_2y_2 .

Оскільки випадкові величини X та Y незалежні, то ймовірність того, що XU прийме, наприклад, значення x_1y_1 , за теоремою множення ймовірностей незалежних подій, дорівнює p_1g_1 . Аналогічно розраховуються ймовірності й інших можливих значень добутку. У підсумку отримуємо наступний закон розподілення величини XU .

XU	x_1y_1	x_2y_1	x_1y_2	x_2y_2
p	p_1g_1	p_2g_1	p_1g_2	p_2g_2

Математичне сподівання дорівнює сумі добутків усіх можливих значень на їх ймовірності:

$$M[X \cdot Y] = x_1y_1 \cdot p_1g_1 + x_2y_1 \cdot p_2g_1 + \\ + x_1y_2 \cdot p_1g_2 + x_2y_2 \cdot p_2g_2$$

Це рівняння можна записати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} M[X \cdot Y] &= y_1 g_1(x_1 p_1 + x_2 p_2) + y_2 g_2(x_1 p_1 + x_2 p_2) = \\ &= (x_1 p_1 + x_2 p_2)(y_1 g_1 + y_2 g_2) = M[X] \cdot M[Y] \end{aligned}$$

Отже, $M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$

Приклад 2.7. Знайти математичне сподівання числа влучень у мішень, якщо ймовірність влучення у мішень при одному пострілі дорівнює p .

Розв'язок. Промах - 0, влучання - 1.

X_i	p_i
0	$1 - p = q$
1	p

$$M[x] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

Приклад 2.8. Знайти математичне сподівання числа появи події A у n дослідах при ймовірності p появи в одному досліді.

Розв'язок. $m_x = M\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \sum_{i=1}^n M[x_i] \quad M[x_i] = p$ (згідно з

попереднім прикладом), отже

$$m_x = np \quad (2.22)$$

2.5. Дисперсія випадкової величини

На практиці часто необхідно оцінити розсіювання можливих значень випадкової величини навколо її середнього значення. На перший погляд може здатися, що для оцінки розсіювання простіше всього

розрахувати всі можливі значення відхилення випадкової величини та потім знайти їх середнє значення.

Відхиленням дискретної випадкової величини X від її математичного сподівання $M[X]$ називається різниця $X - M[X]$.

Відхилення $X - M[X]$ є також дискретна випадкова величина, яка має такий закон розподілу. Але треба зауважити, що *математичне сподівання відхилення $X - M[X]$ дорівнює нулю*:

$$M[X - M(X)] = M(X) - M[M(X)] = M(X) - M(X) = 0.$$

З останньої рівності випливає, що середнє значення розсіювання випадкової величини X в околі її математичного сподівання неможливо характеризувати за допомогою зваженої суми відхилень $x_i - M[X]$, бо ці різниці мають різні знаки і в сумі вони взаємно анулюються. У такому разі можна було б узяти зважену суму абсолютних значень цих різниць $\{x_i - M[X]\}$. Однак на практиці середнє значення розсіювання значень випадкової величини X в околі її математичного сподівання $M[X]$ частіше оцінюють за допомогою величини $\{X - M[X]\}^2$.

Розсіювання випадкової величини навколо математичного сподівання характеризує *дисперсія* (D_x).

Дисперсією (D_x) називається *математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання*, тобто:

$$D_x = D[x] = M \left\{ (X - M[X])^2 \right\} = \sum_{i=1}^n (x_i - M[X])^2 \cdot p_i$$

Дисперсію також можна записати як:

$$D_x = D[x] = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - m_x)^2 \quad (2.23)$$

Можна ввести поняття *центрованої випадкової величини*:

$$x^o = x_i - m_x. \quad (2.24)$$

Величини x^o та x співпадають при $m_x = 0$, тобто коли початок координат розташований у точці, що співпадає з математичним сподіванням. З урахуванням (2.24) формулу (2.23) можна записати таким чином:

$$D_x = \sum_{i=1}^n p_i (x_i^o)^2. \quad (2.25)$$

Згідно з формулою (2.25) формально дисперсію можна трактувати як математичне сподівання квадрата центрованої випадкової величини:

$$D_x = M \left[\left(x^o \right)^2 \right] \quad (2.26).$$

З дисперсією тісно пов'язаний другий початковий момент (перший початковий момент це є математичне сподівання, другий центральний момент це є дисперсія, для другого початкового моменту не має спеціального терміну):

$$\alpha_2[x] = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 \quad (2.27).$$

Другий початковий момент можна формально записати через символ математичного сподівання:

$$\alpha_2[x] = M[x^2]. \quad (2.28)$$

Можна знайти зв'язок між $\alpha_2[x]$ та D_x , використовуючи властивості математичного сподівання:

$$\begin{aligned} D_x &= \sum_{i=1}^n p_i (x_i - m_x)^2 = \sum_{i=1}^n p_i (x_i)^2 - \sum_{i=1}^n 2m_x p_i x_i + \sum_{i=1}^n p_i m_x^2 = \\ &= \alpha_2[x] - 2m_x^2 + m_x^2 = \alpha_2[x] - m_x^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Також записати цю формулу можна так:

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$$

Формула (2.29) може використовуватися разом з формулою (2.23) для обчислення дисперсії.

Приклад 2.9. Два рази кидаємо монету. Знайти дисперсію випадкової величини (появи решки), яка підкоряється біноміальному розподіленню.

Розв'язок.

$$p = 1/2 \text{ та } n = 2. \quad m_x = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

I. Розрахуємо дисперсію за формулою (2.23).

Таблиця 2.3

x_i	p_i	$x_i - m_x$	$(x_i - m_x)^2$	$p_i(x_i - m_x)^2$
0	1/4	-1	1	1/4
1	1/2	0	0	0
2	1/4	1	1	1/4
Σ	1	0		$D_x = 1/2$

II. Розрахуємо дисперсію за формулою (2.29):

Таблиця 2.4

x_i	p_i	x_i^2	$p_i x_i^2$
0	1/4	0	0
1	1/2	1	1/2
2	1/4	4	1
Σ			$\alpha_2 = 3/2$

Отримуємо значення для дисперсії $D_x = 3/2 - 1^2 = 1/2$, яке повністю співпадає із значенням, отриманим за формулою (2.23). Треба підкреслити, що розрахунки за формулою (2.29) більш прості.

Приклад 2.10. Знайти дисперсію при одному пострілі у мішень, якщо ймовірність влучання дорівнює p . Промах - 0, влучання - 1.

Розв'язок.

$$m_x = p; \alpha_2[x] = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p$$

$$\begin{aligned}
 I.D_x &= p(1-p)^2 + q(0-p)^2 = \\
 &= pq^2 + qp^2 = pq(p+q) = pq; \\
 II.D_x &= p - p^2 = p(1-p) = pq;
 \end{aligned}
 \tag{2.30}$$

Приклад 2.11. Знайти дисперсію випадкової величини, яка підкоряється розподіленню Пуассона (відомо, що $m_x = \nu$).

Розв'язок.

$$\begin{aligned}
 \alpha_2[k] &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\nu} \frac{\nu^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + k - k) e^{-\nu} \frac{\nu^k}{k!} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\nu} \frac{\nu^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) e^{-\nu} \frac{\nu^k}{k!} = \\
 &= \nu e^{-\nu} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^{k-1}}{(k-1)!}}_{e^{\nu}} + \nu^2 e^{-\nu} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^{k-2}}{(k-2)!}}_{e^{\nu}} = \nu + \nu^2
 \end{aligned}$$

$$D_k = \alpha_2[k] - \{m[k]\}^2 = \nu + \nu^2 - \nu^2 = \nu \tag{2.31}$$

Властивості дисперсії

1. Дисперсія не випадкової величини дорівнює нулю:

$$D[C] = 1 \cdot (C - m_C)^2 = 1 \cdot (C - C)^2 = 0$$

2. Сталій множник виноситься у квадраті за знак дисперсії, тобто

$$D[CX] = C^2 D[X] \tag{2.32}$$

Доведення. Враховуючи властивість математичного сподівання ($M[CX] = CM[X]$) одержимо:

$$\begin{aligned} D[CX] &= M\{(CX - M[CX])^2\} = \\ &= M\{C^2(X - M[X])^2\} = \\ &= C^2 M\{(X - M[X])^2\} = C^2 D[X] \end{aligned}$$

3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин (або кількох взаємно незалежних величин) дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(x + y) = D[x] + D[y] \quad (2.33)$$

Доведення.

$$\begin{aligned} D(x + y) &= M[(x + y)^2] - [M(x + y)]^2 = M[x^2 + 2xy + y^2] - [M(x) + M(y)]^2 = \\ &= M[x^2] + 2M[xy] + M[y^2] - (M[x])^2 - 2M[x]M[y] - (M[y])^2 = \\ &= \{M[x^2] - (M[x])^2\} + \{M[y^2] - (M[y])^2\} - 2M[x]M[y] + 2M[x]M[y] = \\ &= D[x] + D[y] \end{aligned}$$

Для довільної кількості незалежних випадкових величин можна записати:

$$D\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \sum_{i=1}^n D[x_i] \quad (2.34)$$

4. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(x - y) = D[x] + D[y] \quad (2.35)$$

Доведення.

$$\begin{aligned} D(x - y) &= M[(x - y)^2] - [M(x - y)]^2 = \\ &= M[x^2 - 2xy + y^2] - [M(x) - M(y)]^2 = \\ &= M[x^2] - 2M[xy] + M[y^2] - (M[x]^2 + 2M[x]M[y] - (M[y])^2) = \\ &= \{M[x^2] - (M[x])^2\} + \{M[y^2] - (M[y])^2\} - 2M[x]M[y] + 2M[x]M[y] = \\ &= D[x] + D[y] \end{aligned}$$

Використовуючи дисперсію для характеристики розсіювання випадкової величини, стикаємося з однією незручністю: якщо випадкова величина вимірюється в деяких одиницях, то дисперсія вимірюватиметься у квадратах цих одиниць. Тому доцільно мати характеристику розсіювання значень випадкової величини тієї ж вимірності, що й сама величина. Такою характеристикою є *середньо квадратичне відхилення*.

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} . \quad (2.36)$$

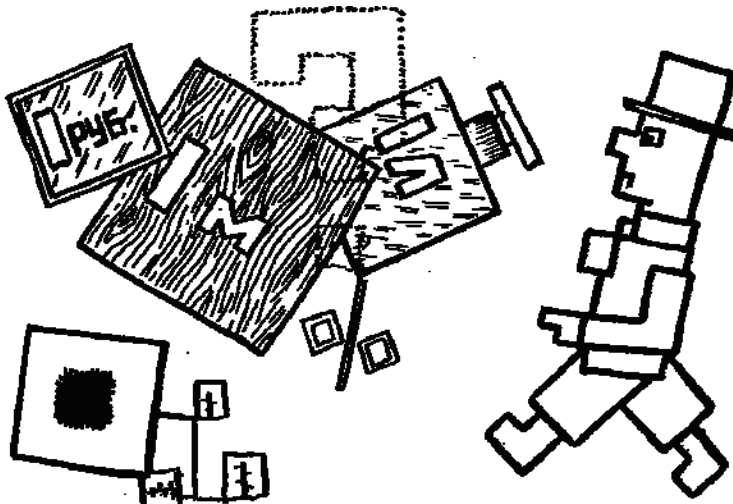


Рис.2.6. Розмірність дисперсії відповідає розмірності квадрата X

Приклад 2.12. Знайти дисперсію числа появи події A у n дослідах при ймовірності P появи в одному досліді.

Розв'язок. Для одного досліді $D_x = pq$. (згідно з наведеним вище прикладом). Всі досліди рівноправні, отже з формули (2.34) маємо:

$$D_x = npq \quad (2.37).$$

Приклад 2.13. Кожна з чотирьох електролампочок має дефект із ймовірністю $q = 0,1$ ($p = 1 - 0,1 = 0,9$ — ймовірність того, що лампочка дефекту не має). Послідовно беруть по одній лампочці, угвинчують у патрон і вмикають електричний струм. Якщо під час увімкнення струму лампочка перегорить, то вгвинчують наступну. Написати закон розподілу випадкової величини X — числа лампочок, які будуть випробувані, та обчислити $D[X]$ і $\sigma[X]$.

Розв'язок. Описана в задачі дискретна випадкова величина X набуває можливих значень: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

Ймовірності подій $X = x_i$, $i = 1, 2, 3$ обчислюємо за формулою:

$$P(X = m) = q^{m-1} p$$

$$p_1 = P(X = 1) = (0,1)^0 0,9 = 0,9;$$

$$p_2 = P(X = 2) = (0,1) 0,9 = 0,09;$$

$$p_3 = P(X = 3) = (0,1)^2 0,9 = 0,009;$$

Для обчислення ймовірності події $X = 4$ використовуємо той факт, що ця подія є сумою двох несумісних подій: B_1 — під час послідовного випробування 4 лампочок три з них перегорять, а четверта

не перегорить; B_2 — під час послідовного випробування 4 лампочок усі вони перегорять. Тому:

$$p_4 = P(X = 4) = (0,1)^3 \cdot 0,9 + (0,1)^4 = 0,001;$$

Отже, закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

$X = x_i,$	1	2	3	4
$P = p_i$	0,9	0,09	0,009	0,001

Далі обчислюємо:

$$M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

$$\begin{aligned} M[X] &= 1 \cdot 0,9 + 2 \cdot 0,09 + 3 \cdot 0,009 + 4 \cdot 0,001 = \\ &= 0,9 + 0,18 + 0,027 + 0,004 = 1,111; \end{aligned}$$

$$M[X^2] = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$$

$$\begin{aligned} M[X^2] &= 1 \cdot 0,9 + 4 \cdot 0,09 + 9 \cdot 0,009 + 16 \cdot 0,001 = \\ &= 0,9 + 0,36 + 0,081 + 0,016 = 1,357; \end{aligned}$$

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$$

$$D[X] = 1,357 - 1,111^2 = 0,1227;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0,1227} = 0,35$$

2.6. Нормальний закон розподілення

Нормальний закон розподілення має таку густину ймовірності:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.38)$$

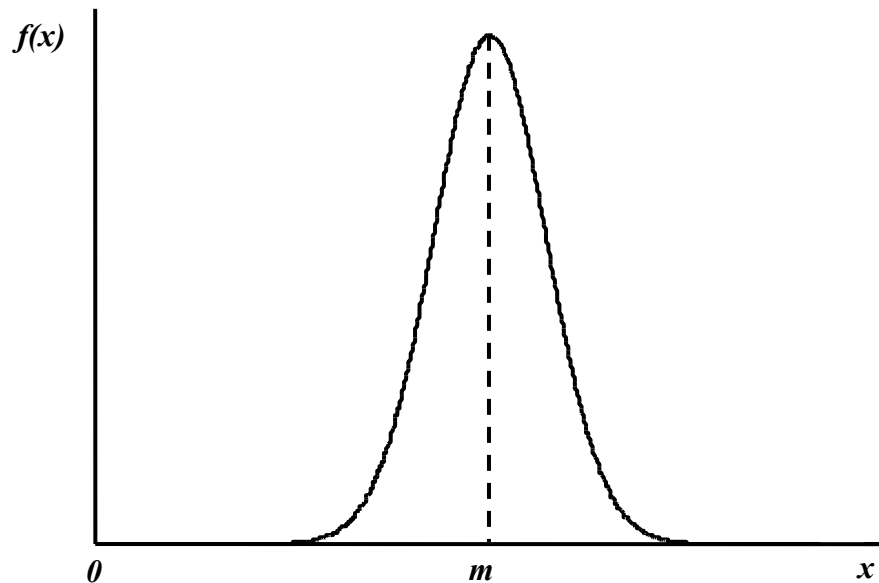


Рис. 2.6. Розподілення за нормальним законом

Крива розподілення за нормальним законом має симетричний пагорбоподібний вигляд (рис. 2.7). Максимальна ордината кривої, що дорівнює $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, відповідає точці $x = m$. По мірі віддалення від точки m густина розподілення падає. При $x \rightarrow \pm\infty$ крива асимптотично наближається до осі абсцис.

З'ясуємо зміст чисельних параметрів m та σ , що входять у вираз нормального закону. Доведемо, що величина m є ні що інше, як математичне сподівання, а величина σ - середньо квадратичне відхилення величини X . Для цього розрахуємо числові характеристики величини X .

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (2.39)$$

Використовуючи заміну змінної

$$t = \frac{x - m}{\sigma\sqrt{2}}, \quad (2.40)$$

маємо:

$$\begin{aligned} M[X] &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma\sqrt{2}t + m)e^{-t^2} dt = \\ &= \frac{\sigma\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2} dt + \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

Неважко впевнитись, що перший з цих двох інтегралів дорівнює нулю. Другий є відомим інтегралом Ейлера – Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Отже,

$$M[X] = m \quad (2.41)$$

Тобто параметр m є математичним сподіванням величини X .

Розрахуємо дисперсію величини X , враховуючи, що при $m = 0$, дисперсія тотожно співпадає із другим початковим моментом, тобто маємо:

$$\begin{aligned}
 D[x] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\
 &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\
 &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{-3/2} = \sigma^2.
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$

Отже, параметр σ у формулі (2.42) є ні що інше, як середньо квадратичне відхилення.

Із формули (2.40) видно, що центром симетрії розподілення є центр розсіяння m . При зміні знаку $(x - m)$ на протилежний вираз (2.41) не змінюється. Якщо змінювати значення m , то крива розподілення буде зміщуватися вздовж осі абсцис, не змінюючи своєї форми (рис. 2.8).

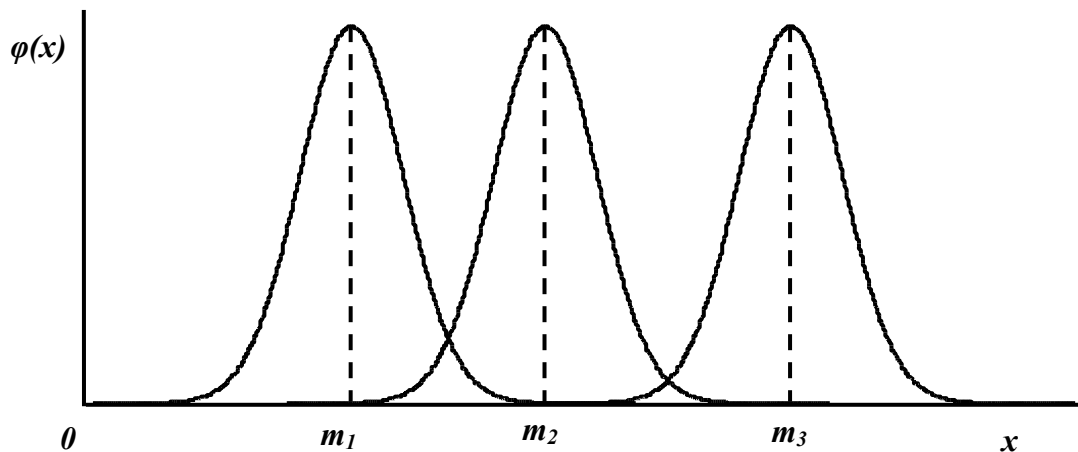


Рис.2.8. Нормальне розподілення з різними значеннями параметра m .

Параметр σ характеризує форму кривої розподілення. Це є характеристика розсіяння. Найбільша ордината кривої розподілення обернено пропорційна σ . При збільшенні σ максимальна ордината зменшується. Так як площа кривої розподілення завжди повинна

залишатися рівною одиниці (умова нормування), то при збільшенні σ крива розподілення стає більш плоскою, розтягуючись вздовж осі абсцис; навпроти, при зменшенні σ крива розподілення витягується уверх, одночасно стискаючись із боків, та стає більш голкоподібною. На рис. 2.9 наведені три нормальні криві (I, II, III) при $m = 0$.

Крива I відповідає найбільшому, а крива III – найменшому значенню σ . Зміна параметра σ рівнозначно зміні масштабу кривої розподілення – збільшення масштабу за однією віссю та такому ж зменшенню за іншою.

Розрахунок ймовірності за допомогою нормального розподілення виконується наступним чином. Відповідно до рівняння (2.39):

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad (2.43)$$

При підстановці $t = \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}$ та $dt = \frac{dx}{\sigma\sqrt{2}}$ у (2.39) можна записати:

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}} \exp(-t^2) \sigma\sqrt{2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}} \exp(-t^2) dt \quad (2.44)$$

Інтеграл $\int \exp(-t^2)$ у явних функціях не береться. Для його розрахунку використовується *функція Лапласа*:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \quad (2.45)$$

Розглянемо деякі властивості функції Лапласа.

1. Функція Лапласа за нульового аргументу ($x = 0$) обертається у нуль:

$$\Phi(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^0 \exp(-t^2) dt = 0 \quad (2.46)$$

2. За $x \rightarrow \infty$ функція Лапласа асимптотично наближається до одиниці:

$$\Phi(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \quad (2.47)$$

3. Функція Лапласа непарна:

$$\Phi(-x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-x} \exp(-t^2) dt \left| \begin{array}{l} t = -z; \\ dt = -dz; \\ t \triangleright 0; t \triangleleft -x; \\ 0 \triangleleft z \triangleleft x \end{array} \right. =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-z^2) d(-z) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-z^2) dz = -\Phi(x) \quad (2.48)$$

На рис. 2.10 наведено графічне зображення функції Лапласа, яке ілюструє всі перелічені властивості. Значення $\Phi(x)$ для ряду значень аргументу x наведені в таблицях додатку.

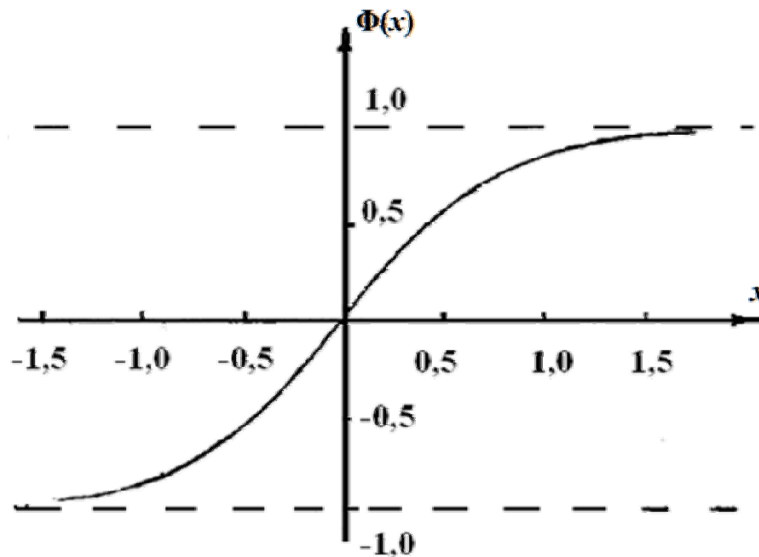


Рис. 2.10. Графічне зображення функції Лапласа.

Використовуючи функцію Лапласа, можна знайти ймовірність $P(\alpha < x < \beta)$ того, що випадкова величина x , яка підкоряється нормальному закону, опиниться на відрізку $[\alpha, \beta]$:

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}} \exp(-t^2) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}} \exp(-t^2) dt - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}}} \exp(-t^2) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] \quad (2.49)$$

У формулі (2.49) використовується та обставина, що функція Лапласа дозволяє знайти ймовірність знаходження випадкової величини x на відрізку від початку координат до довільного числа (α , β і інш.), тобто із допомогою $\Phi(x)$ знаходимо ймовірність:

$$P(0 < x < \beta) \text{ та } P(0 < x < \alpha),$$

а їх різниця дає необхідну ймовірність.

Розглянемо тепер, чому дорівнює ймовірність знаходження безперервної випадкової величини x , що підкоряється нормальному закону, на відрізку $(m-l; m+l)$, який розташований симетрично відносно математичного сподівання m . На рис. 2.11 ця ймовірність дорівнює заштрихованій площі.

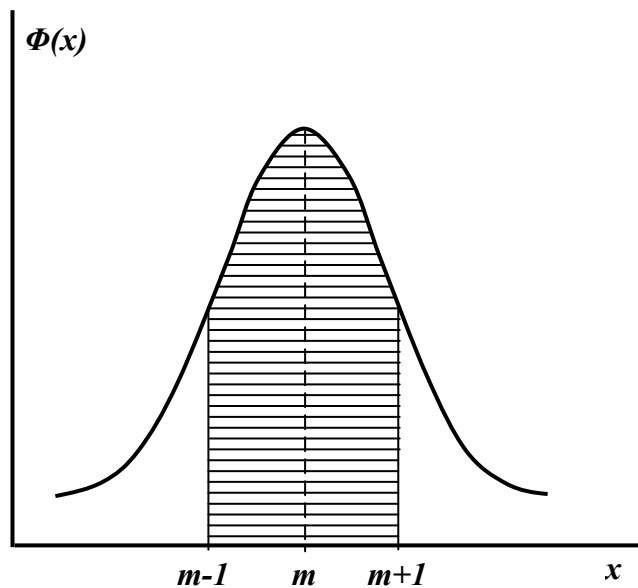


Рис.2.11. Ймовірність знаходження безперервної випадкової величини x , що підкоряється нормальному закону, на відрізку $(m-l; m+l)$, який розташований симетрично відносно математичного сподівання m .

Підставляючи у (2.43) замість $\beta=m+l$ та замість $\alpha=m-l$, отримуємо для значення ймовірності:

$$P(m-l < x < m+l) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{m+l-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{m-l-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\Phi \frac{l}{\sigma\sqrt{2}} \right] - \Phi \left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}} \right) = \Phi \left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}} \right)$$

Цю формулу логічно записати більш компактно к такому вигляді:

$$P(|x - m| < l) = \Phi \left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}} \right) \quad (2.50)$$

Нормальний закон розподілення (який часто називають законом Гаусса) грає винятково важливу роль у теорії ймовірностей та займає серед інших законів особливе положення. Головна особливість, яка виділяє нормальний закон серед інших законів, полягає в тому, що він є *граничним законом*, до якого наближаються інші закони розподілення.

Можна довести, що сума достатньо великої кількості незалежних (чи слабо залежних) випадкових величин, які підкоряються будь-яким законам розподілення (при виконанні деяких нежорстких обмежень), підкоряється нормальному закону, і це виконується тим точніше, чим більша кількість випадкових величин додається одна до одній.

Це положення має назву *центральної граничної теореми*, яка формулюється наступним чином:

якщо $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ є незалежними випадковими величинами, то

закон розподілення їхньої суми $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ необмежено прямує до

нормального при необмеженому зростанні n .

Більшість випадкових величин, що зустрічаються на практиці, таких, наприклад, як помилки вимірювань, можуть бути представлені як сума достатньо великої кількості порівняно малих доданків – елементарних помилок, кожна з яких викликана дією окремої причини, незалежної від інших. Яким би законам розподілення не були підкорені окремі елементарні помилки, особливості цих розподілень у

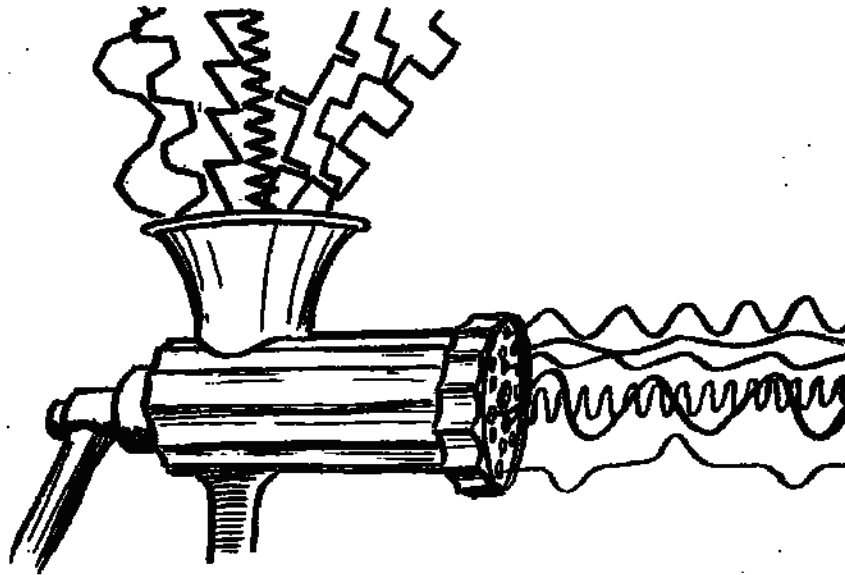


Рис. 2.12. Ілюстрація центральної граничної теореми

сумі великої кількості доданків нівелюються, та сума підкоряється закону, близькому до нормального. Основне обмеження, що накладається на додавання помилок, полягає у тому, щоб вони всі рівномірно грали у загальній сумі відносно малу роль.

Окремим випадком центральної граничної теореми можна вважати теорему Лапласа, яка показує, що за великих значеннях n біноміальне розподілення перетворюється у нормальне.

Для випадку, коли $p = 1/2$, асимптотична формула була знайдена у 1730 р. А.Муавром. У 1783 р. П.С.Лаплас узагальнив формулу А.Муавра для довільного p , яке змінюється від 0 до 1, тому теорему, про яку тут буде йти розмова, іноді називають теоремою Муавра-Лапласа.

Доведення локальної теореми Лапласа достатньо складне, тому буде наведено лише формулювання теореми.

Локальна теорема Лапласа. Якщо ймовірність p появи події A в кожному досліді стала та відмінна від нуля та одиниці, то ймовірність

$P_n(k)$ того, що подія A з'явиться у n дослідах рівно k разів, приблизно дорівнює (тим точніше, чим більше n) значенню функції

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad \text{при } z = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \quad (2.51).$$

Для біноміального розподілення: $m_x = np$; $D_x = npq$, і отже $\sigma_x = \sqrt{npq}$, при великих n дискретна величина k переходить у безперервну x , і рівняння (2.51) стає тотожним нормальному розподілу (2.38).

2.7. Двовимірна випадкова величина

На практиці, крім одновимірних випадкових величин, трапляються багатовимірні. Наприклад, прибуток навання вибраного підприємця визначається кількома одновимірними випадковими величинами: обсягом випуску продукції, ринковими цінами на його продукцію, ринковими цінами на сировину і т.д.

Якщо на одному і тому ж просторі елементарних подій задано n одновимірних випадкових величин, то їх упорядковану сукупність (x_1, x_2, \dots, x_n) називають n -вимірною випадковою величиною, або системою n випадкових величин, або n -вимірним випадковим вектором.

Ми зупинимось на розгляді двовимірної випадкової величини (x, y) . Перехід до випадкової величини більшої вимірності до принципів змін не призводить. Слід звернути увагу, що основні поняття і твердження для одновимірних дискретної і неперервної випадкових

величин є аналогічними, тому для двовірних дискретної і неперервної випадкових величин викладемо їх паралельно.

Двовірну випадкову величину (x, y) називають *дискретною*, якщо її складові x та y є дискретними одновірними випадковими величинами, і *неперервною*, якщо її складові x та y є неперервними одновірними випадковими величинами. Складові x і y двовірної випадкової величини (x, y) називають її *компонентами*.

Основною характеристикою двовірної випадкової величини, як і одновірної, є закон розподілу ймовірностей.

Для *дискретної величини*: нехай $p(x_i, y_j)$ – ймовірність того, що дискретна випадкова величина (x, y) набуде можливих значень (x_i, y_j) , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Іншими словами, $p(x_i, y_j)$ – ймовірність того, що одночасно x набуде значення x_i і y набуде значення y_j , тобто $p(x_i, y_j) = P(x = x_i, y = y_j)$.

Отже, *законом розподілу ймовірностей (законом розподілу)* двовірної дискретної випадкової величини (x, y) називається перелік її можливих значень (x_i, y_j) , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ та відповідних їм ймовірностей $p(x_i, y_j)$.

Закон розподілу ймовірностей записують у вигляді таблиці.

Таблиця 2.5

Закон розподілу ймовірностей випадкової величини (x, y) .

$x = x_i$ $y = y_j$	x_1	x_2	...	x_n	$p(y_j)$
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$...	$p(x_n, y_1)$	$p(y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$...	$p(x_n, y_2)$	$p(y_2)$
...
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$...	$p(x_n, y_m)$	$p(y_m)$
$p(x_i)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$...	$p(x_n)$	1

Слід зауважити, що останній рядок (стовпчик) цієї таблиці задає розподіл одновимірної компоненти $x(y)$. Решта таблиці описує закон розподілу дискретної випадкової величини (x, y) .

Справді, розподіл одновимірної випадкової величини x можна отримати, обчисливши за даними таблиці 2.5 ймовірності $p(x = x_i)$, які позначено через $p(x_i)$. Для цього достатньо зауважити, що подію $(x = x_i)$ можна представити як суму попарно несумісних подій і за правилом додавання ймовірностей несумісних подій одержимо:

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j),$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Аналогічно можна побудувати розподіл одновимірної випадкової величини y , обчисливши ймовірності $p(y = y_j) = p(y_j)$:

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^n p(x_i, y_j),$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

Оскільки кожна із систем подій утворює повну групу попарно несумісних подій

$$(x = x_i, y = y_j) \quad (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m),$$

то

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^n p(x_i) = \sum_{j=1}^m p(y_j) = 1. \quad (2.52)$$

Приклад 2.14. Одночасно кидають кубик і монету, який вигляд матиме закон розподілу двовимірної випадкової величини (x, y) ?
Вважати

x – число очок, що випадають на верхній грані кубика, y – число появ герба на монеті.

В даній задачі випадкова величина x може набути одного з чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, а випадкова величина y – одного з чисел 0;1. Звідки випливає, що (x, y) – дискретна випадкова величина. Оскільки події $x = x_i, y = y_j$ – незалежні, то

$$p(x_i, y_j) = p(x = x_i) \cdot p(y = y_j) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12},$$

і закон розподілу дискретної випадкової величини (x, y) матиме вигляд:

$x = x_i \backslash y = y_j$	1	2	3	4	5	6	$p(y_j)$
0	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/2
1	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/2
$p(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

У випадку *неперервної величини* розподіл ймовірностей двовимірної, як і для одновимірної, неперервної випадкової величини (x, y) визначається за допомогою функції або густини розподілу. Функцією розподілу ймовірностей можна характеризувати і дискретну двовимірну випадкову величину.

Функцією розподілення ймовірностей двовимірної випадкової величини (x, y) називається функція $F(x, y)$, яка для будь-яких чисел x і y визначає ймовірність сумісної появи подій $X < x$ і $Y < y$, тобто:

$$F(x,y) = p(X < x, Y < y). \quad (2.53)$$

Іншими словами, функція розподілення $F(x,y)$ двовимірної випадкової величини (x, y) є ймовірністю того, що її складова X набуде значення, меншого за число x , і складова Y набуде одночасно значення, меншого за число y .

Рівність (2.53) означає, що функція розподілення $F(x,y)$ є ймовірністю того, що значення двовимірної випадкової величини (x, y) (випадкові точки) попадають у безмежний прямокутник із вершиною (x, y) , який розміщений нижче і ліворуч від цієї вершини (рис.2.13).

Функція розподілу $F(x,y)$ має такі властивості:

- Значення функції розподілення задовольняють подвійній нерівності:

$$0 \leq F(x,y) \leq 1; \quad (2.54)$$

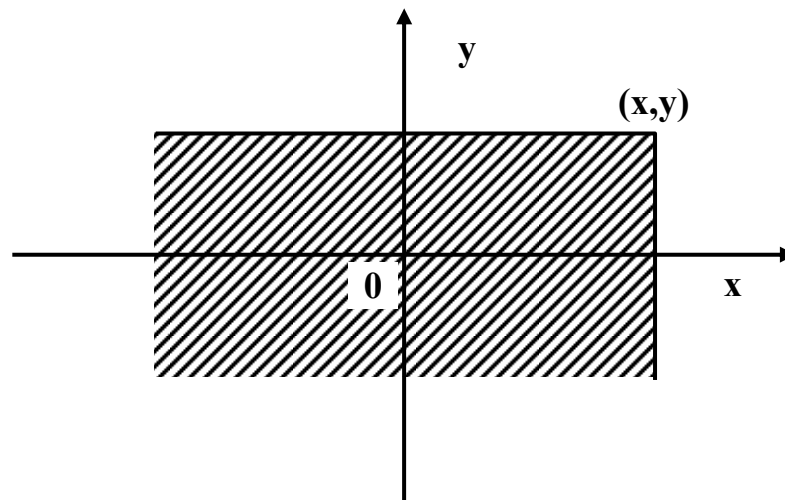


Рис.2.13. Графічне зображення рівняння (2.53)

$F(x,y)$ є неспадною функцією за кожним аргументом, тобто:

$$F(x_2,y) \geq F(x_1,y), \text{ якщо } x_2 > x_1; \quad (2.55)$$

$$F(x,y_2) \geq F(x,y_1), \text{ якщо } y_2 > y_1;$$

- Для функції $F(x,y)$ виконуються граничні співвідношення:

$$\begin{aligned} F(-\infty, y) &= 0, F(x, -\infty) = 0, \\ F(-\infty, -\infty) &= 0, F(+\infty, +\infty) = 1; \end{aligned} \quad (2.56)$$

Доведення: рівності $F(-\infty, y) = 0$, $F(x, -\infty) = 0$, $F(-\infty, -\infty) = 0$ випливають з того, що відповідні сумісні події є неможливими і їх ймовірності дорівнюють нулю; рівність $F(+\infty, +\infty) = 1$ обумовлена тим, що сумісна подія $x < \infty$ і $y < \infty$ - вірогідна та її ймовірність дорівнює одиниці.

Ці твердження мають наглядну геометричну інтерпретацію на рис. 2.13: якщо $x \rightarrow -\infty$, то права сторона безмежного прямокутника переміщується необмежено вліво і при цьому ймовірність того, що випадкова точка потрапить у цей прямокутник, наближається до нуля. Аналогічну геометричну інтерпретацію маємо, коли $y \rightarrow -\infty$ або $x \rightarrow -\infty$ і $y \rightarrow -\infty$.

- Якщо $y \rightarrow \infty$, функція розподілу $F(x,y)$ двовимірної випадкової величини (x, y) наближається до функції розподілу $F_1(x)$ складової x , а якщо $x \rightarrow \infty$ до функції розподілу $F_2(y)$ складової y , тобто:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = F(x, \infty) = F_1(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = F(\infty, y) = F_2(y);$$

Доведення: перше з цих співвідношень випливає з того, що подія $y < \infty$ є вірогідною і тому

$$F(x, \infty) = p(X < x | y < \infty) \approx p(X < x) = F_1(x),$$

тобто в цьому випадку $F(x, \infty)$ є ймовірністю події $X < x$ або функцією розподілення складової X .

- Ймовірність того, що значення двовимірної випадкової величини (x, y) потраплять у прямокутник $Q = \{(x, y): a \leq x < b, c \leq y < d\}$ обчислюється за формулою:

$$P(a \leq x < b, c \leq y < d) \approx [F(b, d) - F(a, d)] - [F(b, c) - F(a, c)]. \quad (2.57)$$

Слід зауважити, що у випадку безперервності випадкової величини (x, y) функція розподілу $F(x, y)$ теж є безперервною і для будь-яких дійсних чисел x_0 і y_0 ймовірність $P(x = x_0, y = y_0) = 0$. В цьому випадку формулу (2.57) можна застосовувати також для обчислення ймовірностей:

$$\begin{aligned} P(a \leq x < b, c \leq y < d) &= P(a < x \leq b, c < y \leq d) = \\ &= P(a < x < b, c < y < d) = P(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d). \end{aligned}$$

Приклад 2.15. Функція розподілення ймовірностей двовимірної безперервної випадкової величини (x, y) має вигляд:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq -6, \quad \text{або} \quad y \leq -2; \\ \frac{x+6}{8}, & -6 < x \leq 2, \quad y > 4; \\ \frac{(x+6)(y+2)}{48}, & -6 < x \leq 2, \quad -2 < y \leq 4; \\ \frac{y+2}{6}, & x > 2, \quad -2 < y \leq 4; \\ 1, & x > 2, \quad y > 4. \end{cases}$$

Обчислити $p(-2 < x < 1, -1 < y < 3)$.

Розв'язок. За формулою (2.57), враховуючи останнє зауваження, маємо:

$$\begin{aligned} p(-2 < x < 1, -1 < y < 3) &= [F(1,3) - F(-2,3)] - [F(1,-1) - F(-2,-1)] = \\ &= \left[\frac{(1+6)(3+2)}{48} - \frac{(-2+6)(3+2)}{48} \right] - \left[\frac{(1+6)(-1+2)}{48} - \frac{(-2+6)(-1+2)}{48} \right] = \\ &= \frac{1}{48}(35 - 20 - 7 + 4) = \frac{1}{48} \cdot 12 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Густиною (щільністю) розподілення ймовірностей $f(x,y)$ двовимірної безперервної випадкової величини (x, y) називають другу мішану похідну від її функції розподілення, тобто:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (2.58)$$

Густину розподілення ймовірностей двовимірної випадкової величини ще називають *двовимірною густиною розподілення*.

Густина (щільність) розподілення ймовірностей $f(x,y)$ має такі властивості:

- густина розподілення ймовірностей невід'ємна: $f(x,y) \geq 0$;
- подвійний невластний інтеграл із безмежними межами інтегрування від двовимірної густини розподілення дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1. \quad (2.59)$$

(Подвійний інтеграл (2.59) обчислюється наступним чином: спочатку обчислюють інтеграл за однією змінною, вважаючи другу сталою, а потім за другою змінною);

- якщо всі значення x і y двовимірної випадкової величини (x,y) містяться в прямокутнику $\Omega = \{a < x < b, c < y < d\}$ і $f(x,y)$ – густина її розподілення, то

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = 1. \quad (2.60)$$

- функція розподілення $F(x,y)$ двовимірної безперервної випадкової величини (x,y) визначається за двовимірною густиною $f(x,y)$ цієї величини за допомогою рівності:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.61)$$

- Якщо можливі значення двовимірної безперервної випадкової величини (x,y) розміщені в прямокутнику

$$Q = \{ (x,y): a < x < b, c < y < d \},$$

то формула (2.54) набуває вигляду:

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.62)$$

- Ймовірність того, що значення двовимірної неперервної випадкової величини (x,y) потраплять у прямокутник

$$Q = \{ (x,y): a < x < b, c < y < d \},$$

виражається формулою:

$$P(a < x < b \cap c < y < d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \quad (2.63)$$

- Якщо $f(x, y)$ – густина розподілення двовимірної неперервної випадкової величини (x, y) , то густини $f_1(x)$ і $f_2(y)$ розподілення одновимірних випадкових величин x і y відповідно визначаються за формулами:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \quad (2.64)$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \quad (2.65)$$

Обґрунтуємо співвідношення (2.64) аналогічними міркуваннями, як і у випадку густини розподілення одновимірної випадкової величини.

Якщо $F_1(x)$ – функція розподілення складової x , то її густина розподілення дорівнює:

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx}.$$

Функція розподілення $F(x, y)$ двовимірної випадкової величини (x, y) виражається через густину її розподілення $f(x, y)$ рівністю (2.61), з якої випливає:

$$F_1(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

Диференціюючи обидві частини одержаної рівності по x , одержимо

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

Аналогічно можна обґрунтувати і співвідношення (2.65).

Приклад 2.16. Двовимірна безперервна випадкова величина (x, y) задана густиною розподілення:

$$f(x, y) \begin{cases} a = \text{const}, & (x, y) \in Q; \\ 0, & (x, y) \notin Q; \end{cases}$$

де $Q = \{(x, y): -1 < x < 3, 2 < y < 4\}$.

Знайти a і $F(x, y)$. Обчислити $p(0 < x < 3, 2 < y < 5)$.

Розв'язок.

Сталу величину a визначають з умови (2.60):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 \int_2^4 a dx dy = 1 &\Rightarrow a \int_{-1}^3 dx \cdot \int_2^4 dy = 1 \Rightarrow a \cdot x(3 - (-1)) \cdot y(4 - 2) = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a \cdot 4 \cdot 2 = 1 \Rightarrow 8a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Із знайденим значенням a двовимірна густина розподілення $f(x, y)$ має вигляд:

$$f(x, y) \begin{cases} 1/8, & (x, y) \in Q; \\ \end{cases}$$

$$0, \quad (x, y) \notin Q;$$

Функцію розподілення $F(x, y)$ описаної задачі двовимірної випадкової величини знаходимо за формулою (2.61). Розглянемо випадки:

$$\text{а) } x \leq -1 \text{ або } y \leq 2 \Rightarrow$$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0$$

$$\text{б) } -1 < x \leq 3, 2 < y \leq 4 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^x \int_2^y \frac{1}{8} d\xi d\eta = \frac{1}{8} \int_{-1}^x d\xi \cdot \int_2^y d\eta = \\ &= \frac{1}{8} \cdot (x - (-1)) \cdot (y - 2) = \frac{1}{8} (x + 1)(y - 2); \end{aligned}$$

$$\text{в) } -1 < x \leq 3, y > 4 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^x \int_2^4 \frac{1}{8} d\xi d\eta = \frac{1}{8} \int_{-1}^x d\xi \cdot \int_2^4 d\eta = \\ &= \frac{1}{8} \cdot (x - (-1)) \cdot (4 - 2) = \frac{1}{4} (x + 1); \end{aligned}$$

$$\text{г) } x > 3, 2 < y \leq 4 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^3 \int_2^y \frac{1}{8} d\xi d\eta = \frac{1}{8} \int_{-1}^3 d\xi \cdot \int_2^y d\eta = \\ &= \frac{1}{8} \cdot (3 - (-1)) \cdot (y - 2) = \frac{1}{2} (y - 2); \end{aligned}$$

$$\text{д) } x > 3, y > 4 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^3 \int_2^4 \frac{1}{8} d\xi d\eta = \frac{1}{8} \int_{-1}^3 d\xi \cdot \int_2^4 d\eta = \\
 &= \frac{1}{8} \cdot (3 - (-1)) \cdot (4 - 2) = 1;
 \end{aligned}$$

Отже, функція $F(x, y)$ записується так:

$$F(x, y) \begin{cases} 0, & x \leq -1 \text{ або } y \leq 2; \\ \frac{1}{4}(x+1), & -1 < x \leq 3, 2 < y \leq 4; \\ \frac{1}{8}(x+1)(y-2), & -1 < x \leq 3, y > 4; \\ \frac{1}{2}(y-2), & x > 3, 2 < y \leq 4; \\ 1, & x > 3, y > 4. \end{cases}$$

Шукану ймовірність обчислюють за формулою (2.63):

$$\begin{aligned}
 P(0 < x < 1, 2 < y < 5) &= \\
 &= \int_0^1 \int_2^5 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_2^4 \frac{1}{8} dx dy + \int_0^1 \int_4^5 0 dx dy = \frac{1}{8} \cdot (1 - 0) \cdot (4 - 2) = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Оскільки функція розподілу $F(x, y)$ відома, то цю ймовірність можна також обчислити за формулою (2.50).

2.8. Залежні і незалежні випадкові величини. Умовні закони розподілу

В попередньому розділі було показано, що, знаючи закон розподілення системи двох (дискретних або неперервних) випадкових величин, можна знайти закон розподілення окремих величин x та y , які входять в систему $F(x, y)$.

Виникає питання: чи не можна, знаючи закони розподілення окремих випадкових величин x та y , знайти їх сумісний закон розподілення?

Це можна зробити лише в одному частковому випадку, коли випадкові величини x та y , що утворюються систему, є *незалежними*.

Згадаємо, що дві випадкові величини називаються *незалежними*, якщо закон розподілення кожної з них не залежить від того, якого значення набула інша.

Іншими словами, дві випадкові величини називаються *незалежними*, якщо для будь – яких дійсних чисел x і y ймовірність сумісної появи двох подій $X < x$ і $Y < y$ дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$p(X < x \cap Y < y) = p(X < x) \cdot p(Y < y) \quad (2.66)$$

або

$$F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y) \quad (2.67)$$

Якщо функція розподілу $F(x,y)$ не може бути подана як добуток $F_1(x) \cdot F_2(y)$, то величини x та y , є *залежними*.

Необхідна і достатня умова *незалежності* двох дискретних випадкових величин x і y виражається системою рівностей:

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j), \quad i = 1 \dots n, j = 1 \dots m. \quad (2.68)$$

Для безперервних випадкових величин необхідна і достатня умова незалежності x і y виражається також через густину розподілення:

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad (2.69)$$

Наприклад, у прикладі 2.14 дискретні випадкові величини x і y - незалежні, оскільки для ймовірностей $p(x_i, y_j)$, $p(x_i)$, $p(y_j)$ виконується система рівностей (2.68, 2.69):

$$\begin{aligned} p(x_1, y_1) &= 1/12 = 1/6 \cdot 1/2 = p(x_1) \cdot p(y_1); \\ p(x_1, y_2) &= 1/12 = 1/6 \cdot 1/2 = p(x_1) \cdot p(y_2) \text{ і т.д.} \end{aligned}$$

Аналогічний висновок можна зробити щодо безперервних випадкових величин із прикладу 2.16. Тут двовимірна випадкова величина (x, y) задана густиною розподілу:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/8, & (x, y) \in Q; \\ 0, & (x, y) \notin Q; \end{cases}$$

де $Q = \{(x, y): -1 < x < 3, 2 < y < 4\}$.

За допомогою формул (2.64, 2.65) знаходимо густини розподілення $f_1(x)$, $f_2(y)$:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \frac{1}{8} \int_2^4 dy = \frac{1}{4}; & x \in (-1; 3); \\ 0, & x \notin (-1; 3) \end{cases}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \frac{1}{8} \int_{-1}^3 dx = \frac{1}{2}; & y \in (2; 4); \\ 0, & y \notin (2; 4) \end{cases}$$

Тоді з рівності $f(x, y) = 1/8 = 1/4 \cdot 1/2 = f_1(x) \cdot f_2(y)$ маємо, що x і y - незалежні.

Приклад 2.17. Закон розподілення двовимірної дискретної випадкової величини (x,y) задано таблицею:

$x \backslash y$	10	20	30	40	$p(y_j)$
-8	0,01	0,03	0,02	0,04	0,1
-4	0,07	0,1	0,07	0,06	0,3
-2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,6
$p(x_i)$	0,18	0,33	0,19	0,3	

З'ясувати, чи будуть випадкові величини x і y - незалежні.

Розв'язок.

У внутрішніх клітинах таблиці містяться ймовірності $p(x_i, y_j)$, які визначають сумісне розподілення двох випадкових величин x і y , а останній рядок і останній стовпчик характеризують одновимірні розподілення компоненти x і y , відповідно.

В цій таблиці $p(x_1, y_1) = 0,01$; $p(x_1) = 0,18$; $p(y_1) = 0,1$, тому $p(x_i, y_j) \neq p(x_i) \cdot p(y_j)$ і випадкові величини x і y - залежні.

Приклад 2.18. Двовимірна безперервна випадкова величина (x,y) задана густиною розподілення:

$$f(x,y) = \begin{cases} a(x+y), & (x,y) \in Q; \\ 0, & (x,y) \notin Q; \end{cases}$$

де $Q = \{(x,y): 0 < x < 1; 0 < y < 1\}$.

Визначити число a , густини розподілення одновимірних компонент x і y та з'ясувати, чи випадкові величини x і y незалежні.

Розв'язок.

Значення величини a знаходимо з умови (2.60):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 a(x+y) dx dy = 1 &\Leftrightarrow a \int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy = 1 \Leftrightarrow a \left(\int_0^1 \int_0^1 x dx dy + \int_0^1 \int_0^1 y dx dy \right) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \left(\int_0^1 x dx \int_0^1 dy + \int_0^1 dx \int_0^1 y dy \right) = 1 \Leftrightarrow a \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 1 \Leftrightarrow a = 1 \end{aligned}$$

Отже, випадкова величина (x,y) має густину розподілення ймовірностей:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y), & (x,y) \in Q; \\ 0, & (x,y) \notin Q; \end{cases}$$

За формулами (2.64) і (2.65) знаходимо густини розподілення $f_1(x)$ і $f_2(y)$:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \begin{cases} \int_0^1 (x+y) dy; & x \in (0,1); \\ 0; & x \notin (0,1) \end{cases} = \begin{cases} \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1; & x \in (0,1); \\ 0; & x \notin (0,1) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x + \frac{1}{2}; & x \in (0,1); \\ 0; & x \notin (0,1) \end{cases}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \begin{cases} \int_0^1 (x+y) dx; & y \in (0,1); \\ 0; & y \notin (0,1) \end{cases} = \begin{cases} \left(xy + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1; & y \in (0,1); \\ 0; & y \notin (0,1) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} y + \frac{1}{2}; & y \in (0,1); \\ 0; & y \notin (0,1) \end{cases}$$

Оскільки $f(x, y) = x + y \neq \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ при $(x, y) \in Q$, то випадкові величини x і y - залежні.

Якщо випадкові величини, які утворюють систему, залежні, то для знаходження їх сумісного розподілення недостатньо знати закони розподілення складових, а потрібно ще знати умовний закон розподілення однієї з них. Це питання тісно пов'язане з поняттям ймовірності подій A за умови, що відбулася подія B , тобто з умовною ймовірністю подій A , яка виражається формулою :

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}, \quad p(B) > 0$$

У випадку *дискретної величини*, нехай (x_i, y_j) – можливі значення дискретної двовимірної випадкової величини (x, y) , $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots m$. Через $p(x_i|y_j)$ позначимо умовну ймовірність того, що випадкова величина x набуде значення x_i за умови, що випадкова величина y набула значення y_j , а через $p(y_j|x_i)$ - умовну ймовірність того, що випадкова величина y набуде значення y_j за умови, що випадкова величина x набула значення x_i .

Ймовірності $p(x_i|y_j)$ і $p(y_j|x_i)$ обчислюємо за формулами:

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \quad (2.70)$$

$$p(y_j|x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}, \quad (2.71)$$

які впливають з формули для обчислення умовної ймовірності подій.

Умовним законом розподілу складової x випадкової величини (x,y) за фіксованого значення складової $y = y_j$ називається перелік усіх можливих значень x_i випадкової величини x та відповідних їм умовних ймовірностей $p(x_i|y_j)$.

Умовним законом розподілення складової y двовимірної дискретної випадкової величини (x,y) за фіксованого значення складової $x = x_i$ називається перелік усіх можливих значень y_j випадкової величини y та відповідних їм умовних ймовірностей $p(y_j|x_i)$

Умовні закони розподілення складових x, y двовимірної дискретної випадкової величини (x,y) записують, відповідно, у формі таких таблиць:

$x = x_i$	x_1	x_2	x_n	$\sum_{i=1}^n p(x_i y_j) = 1$
$p(x_i y_j)$	$p(x_1 y_j)$	$p(x_2 y_j)$	$p(x_n y_j)$	

$y = y_j$	y_1	y_2	y_m	$\sum_{i=1}^m p(y_j x_i) = 1$
$p(y_j x_i)$	$p(y_1 x_i)$	$p(y_2 x_i)$	$p(y_m x_i)$	

Отже, можна зробити висновок: знаючи безумовні закони розподілення складових x і y та умовний закон розподілення однієї з них, можна скласти закон розподілення двовимірної дискретної випадкової величини (x,y) і ймовірності $p(x_i|y_j)$ можливих їх значень (x_i,y_j) обчислюємо за формулами:

$$p(x_i|y_j) = p(y_j) \cdot p(x_i|y_j),$$

$$p(y_j|x_i) = p(x_i) \cdot p(y_j|x_i),$$

Приклад 2.19. Закон розподілу двовимірної випадкової величини (x, y) задано таблицею

$x \backslash y$	10	20	30	40	$p(y_j)$
-8	0,01	0,03	0,02	0,04	0,1
-4	0,07	0,1	0,07	0,06	0,3
-2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,6
$p(x_i)$	0,18	0,33	0,19	0,3	

Записувати умовні закони розподілення $X|Y = -4$ і $Y|X = 40$.

Розв'язок.

Запишемо закон розподілення випадкової величини x за фіксованого значення $y = -4$. Для цього обчислимо умовні ймовірності :

$$p(x_1|y_2) = \frac{p(x_1, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0,07}{0,3}, \quad p(x_2|y_2) = \frac{p(x_2, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0,1}{0,3},$$

$$p(x_3|y_2) = \frac{p(x_3, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0,07}{0,3}, \quad p(x_4|y_2) = \frac{p(x_4, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0,06}{0,3}.$$

Умовний закон розподілення $X|Y = -4$:

$x = x_i$	10	20	30	40
$p(x_i y_2)$	$\frac{0,07}{0,3}$	$\frac{0,1}{0,3}$	$\frac{0,07}{0,3}$	$\frac{0,06}{0,3}$

Зробимо перевірку:

$$\sum_{i=1}^4 p(x_i|y_2) = \frac{0,07}{0,3} + \frac{0,1}{0,3} + \frac{0,07}{0,3} + \frac{0,06}{0,3} = 1$$

Запишемо закон розподілення випадкової величини y за фіксованого значення $x = 40$. Для цього обчислимо ймовірності:

$$p(y_1|x_4) = \frac{p(y_1, x_4)}{p(x_4)} = \frac{0,04}{0,3},$$

$$p(y_2|x_4) = \frac{p(y_2, x_4)}{p(x_4)} = \frac{0,06}{0,3},$$

$$p(y_3|x_4) = \frac{p(y_3, x_4)}{p(x_4)} = \frac{0,2}{0,3},$$

Умовний закон розподілення $y|x = 40$:

$y = y_i$	-8	-4	-2
$p(y_j x_4)$	$\frac{0,04}{0,3}$	$\frac{0,06}{0,3}$	$\frac{0,2}{0,3}$

Перевірка: $\sum_{j=1}^3 p(y_j|x_4) = \frac{0,04}{0,3} + \frac{0,06}{0,3} + \frac{0,2}{0,3} = 1.$

У випадку *безперервної величини* нехай (x, y) - двовимірною безперервною випадковою величиною і $f(x, y)$ - густина її сумісного розподілення. Закони розподілення складових x і y визначаються рівностями (2.64) і (2.65)

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

Умовною густиною $\varphi(x|y)$ розподілення ймовірностей складової x двовимірної безперервної величини (x, y) за фіксованого значення y

називається відношення густини $f(x,y)$ її сумісного розподілення до густини $f_2(y)$ складової y :

$$\varphi(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}, \quad f_2(y) \neq 0 \quad (2.72)$$

Умовною густиною $\psi(y|x)$ розподілення ймовірностей складової y двовимірної безперервної величини (x,y) за фіксованого значення x називається відношення густини $f(x,y)$ її сумісного розподілення до густини $f_1(x)$ складової x :

$$\psi(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}, \quad f_1(x) \neq 0 \quad (2.73)$$

Умовна густина розподілу ймовірностей складової двовимірної безперервної випадкової величини визначає її умовний закон розподілу.

Отже, напрошується висновок: знаючи густини розподілення складових x і y та її умовну густину розподілення однієї з них, можемо обчислити густину розподілення двовимірної неперервної величини (x,y) за формулами:

$$f(x,y) = f_2(y) \cdot \varphi(x|y), \quad f(x,y) = f_1(x) \cdot \psi(y|x).$$

Приклад 2.20. Знайти умовні густини розподілення $\varphi(x|y)$ і $\psi(y|x)$ для залежних безперервних випадкових величин x і y , які описано у прикладі 2.18.

Розв'язок.

За допомогою формул (2.72) і (2.73) та виразів $f(x, y)$, $f_2(y)$, $f_1(x)$, отриманих у ході розв'язку приклада 2.18, знаходимо:

$$\varphi(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \frac{x+y}{y+\frac{1}{2}}, & x \in (0;1); \\ 0, & x \notin (0;1), \end{cases}$$

де $y \in (0;1)$ – фіксоване;

$$\psi(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}, & y \in (0;1); \\ 0, & y \notin (0;1), \end{cases}$$

де $x \in (0;1)$ – фіксоване;

Робимо перевірку:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x|y) dx &= \int_0^1 \frac{x+y}{y+\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{y+\frac{1}{2}} \int_0^1 (x+y) dx = \frac{1}{y+\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 x dx + \int_0^1 y dx \right) = \\ &= \frac{1}{y+\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + y \cdot x \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{y+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + y \right) = 1. \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y|x) dy = \int_0^1 \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{x+\frac{1}{2}} y = \frac{1}{x+\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 x dy + \int_0^1 y dy \right) =$$

$$= \frac{1}{x + \frac{1}{2}} \left(x \cdot y \Big|_0^1 + \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{x + \frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2} \right) = 1.$$

Повернемося до питання про залежність і незалежність випадкових величин. Нагадаємо, що дві випадкові величини називаються *незалежними*, якщо закон розподілення однієї з них не залежить від того, якого можливого значення набула друга величина. У загальному випадку незалежність складових x і y двовимірної випадкової величини (x, y) рівносильна виконанню рівності (2.66), а критерії незалежності окремо для дискретного і безперервного випадків визначаються співвідношеннями (2.68) і (2.69). Звідки випливає, що коли величини x і y незалежні та безперервні, то їх умовні густини розподілення $\varphi(x|y)$ і $\psi(y|x)$ збігаються з "безумовними" густинами розподілень $f_1(x)$ і $f_2(y)$:

$$\varphi(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{f_1(x) \cdot f_2(y)}{f_2(y)} = f_1(x),$$

$$\psi(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f_1(x) \cdot f_2(y)}{f_1(x)} = f_2(y).$$

Очевидно, подібний висновок про рівність відповідних умовного і безумовного розподілення двох незалежних випадкових величин можна зробити і в дискретному випадку.

Слід зауважити, що поняття *залежності випадкових величин* не можна змішувати з *поняттям функціональної залежності*. У разі існування функціональної залежності між величинами x і y кожному значенню x за певним законом відповідає одне і тільки одне значення y . Якщо ж ми маємо справу із *залежними випадковими величинами*, то в

загальному випадку, знаючи значення однієї, можна тільки вказати закон розподілення другої. Така залежність називається *ймовірнісною* (або *стохастичною*).

Отже, залежність між випадковими величинами може бути більш або менш тісна: від повної її відсутності через різні ступені ймовірнісної залежності аж до строгої, функціональної залежності, коли, знаючи значення однієї випадкової величини, можна точно вказати значення другої.

2.9. Чисельні характеристики двовимірної випадкової величини. Коваріація і коефіцієнт кореляції

Чисельні характеристики складових x і y двовимірної випадкової величини (x, y) визначають за формулами, які є аналогами для одновимірної випадкової величини. Специфічні властивості деяких чисельних характеристик двовимірної випадкової величини пов'язані із залежністю її компонент.

У випадку *дискретної випадкової величини* основні чисельні характеристики (x, y) виражаються формулами:

- *математичне сподівання:*

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i p(x_i, y_j), \quad (2.74)$$

$$M(y) = \sum_{j=1}^m y_j p(y_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n y_j p(x_i, y_j); \quad (2.75)$$

- *дисперсії:*

$$D(x) = \sum_{i=1}^n [x_i - M(x)]^2 \cdot p(x_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [x_i - M(x)]^2 \cdot p(x_i, y_j), \quad (2.76)$$

$$D(y) = \sum_{j=1}^m [y_j - M(y)]^2 \cdot p(y_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n [y_j - M(y)]^2 \cdot p(x_i, y_j) \quad (2.77)$$

Або

$$D(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p(x_i) - [M(x)]^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^2 \cdot p(x_i, y_j) - [M(x)]^2, \quad (2.78)$$

$$D(y) = \sum_{j=1}^m y_j^2 \cdot p(y_j) - [M(y)]^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n y_j^2 \cdot p(x_i, y_j) - [M(y)]^2; \quad (2.79)$$

- середньоквадратичні відхилення:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sigma_x, \quad (2.80)$$

$$\sigma(y) = \sqrt{D(y)} = \sigma_y. \quad (2.81)$$

Приклад 2.21 Закон розподілення двовимірної дискретної випадкової величини (x, y) задано таблицею:

$x_i \backslash y_j$	-2	4	6
3	$1,7a$	$2,2a$	$2,1a$
5	$0,3a$	$1,8a$	$1,9a$

Визначити число a і обчислити чисельні характеристики $M(x)$, $D(x)$, $\sigma(x)$, $M(y)$, $D(y)$, $\sigma(y)$.

Розв'язок.

З умови (2.52) маємо, що

$$1,7a + 2,2a + 2,1a + 0,3a + 1,8a + 1,9a = 1 \Rightarrow 10a = 1 \Rightarrow a = 0,1$$

Із знайденим числом a і доповненими ймовірностями $p(x_i)$ і $p(y_j)$ таблиця набуває такого змісту :

$x_i \backslash y_j$	-2	4	6	$p(y_j)$
3	0,17	0,22	0,21	0,6
5	0,03	0,18	0,19	0,4
$p(x_i)$	0,2	0,4	0,4	

За формулами (2.74) – (2.81) обчислюємо чисельні характеристики :

$$M(x) = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot p(x_i) = (-2) \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,4 = -0,4 + 1,6 + 2,4 = 3,6$$

$$M(x^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \cdot p(x_i) = (-2)^2 \cdot 0,2 + 4^2 \cdot 0,4 + 6^2 \cdot 0,4 = 0,8 + 6,4 + 14,4 = 21,6$$

$$D(x) = M(x^2) - M^2(x) = 21,6 - 3,6^2 = 21,6 - 12,96 = 8,64$$

$$\sigma(x) = \sigma_x = \sqrt{8,64} \cong 2,94$$

$$M(y) = \sum_{j=1}^2 y_j p(y_j) = 3 \cdot 0,6 + 5 \cdot 0,4 = 1,8 + 2 = 3,8$$

$$M(y^2) = \sum_{j=1}^2 y_j^2 p(y_j) = 3^2 \cdot 0,6 + 5^2 \cdot 0,4 = 5,4 + 10 = 15,4$$

$$D(y) = M(y^2) - M^2(y) = 15,4 - 3,8^2 = 15,4 - 14,44 = 0,96$$

$$\sigma(y) = \sigma_y = \sqrt{0,96} \approx 0,98$$

У випадку двовимірної безперервної випадкової величини (x, y) основні чисельні характеристики виражаються формулами:

- Математичні сподівання:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy, \quad (2.82)$$

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy, \quad (2.83)$$

де $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$ - густина розподілення складової x

де $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$ - густина розподілення складової y .

Нагадаємо, що інтеграл за змінною y обчислюється за умови, що x - стала величина, а інтеграл за змінною x - за умови, що y - стала величина.

- Дисперсії:

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(x)]^2 f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(x)]^2 f(x, y) dx dy, \quad (2.84)$$

$$D(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} [y - M(y)]^2 f_2(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [y - M(y)]^2 f(x, y) dx dy, \quad (2.85)$$

або

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x) dx - [M(x)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, y) dx dy - [M(x)]^2, \quad (2.86)$$

$$D(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_1(y) dy - [M(y)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x, y) dx dy - [M(y)]^2; \quad (2.87)$$

- Середньо квадратичні відхилення:

$$\sigma(x) = \sigma_x = \sqrt{D(x)}, \quad (2.88)$$

$$\sigma(y) = \sigma_y = \sqrt{D(y)} \quad (2.89)$$

Якщо всі значення двовимірної безперервної випадкової величини містяться в прямокутнику $\Omega = \{a < x < b, c < y < d\}$, то в усіх наведених

формулах $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots$ замінюємо на $\int_a^b \int_c^d \dots$.

Приклад 2.22. Двовимірна безперервна випадкова величина (x, y) задана густиною:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x+y), & (x, y) \in Q; \\ 0, & (x, y) \notin Q; \end{cases}$$

де $Q = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Обчислити чисельні характеристики $M(x), D(x), \sigma(x), M(y), D(y), \sigma(y)$.

Розв'язок:

Чисельні характеристики обчислюємо за формулами (2.82)–(2.89):

$$M(X) = \int_0^1 \int_0^1 x(x+y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + xy) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 x^2 dx dy + \int_0^1 \int_0^1 xy dx dy =$$

$$= \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 dy + \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 y dy = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \cdot y \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12};$$

$$M(Y) = \int_0^1 \int_0^1 y(x+y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 (xy + y^2) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 xy dx dy + \int_0^1 \int_0^1 y^2 dx dy =$$

$$= \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 y dy + \int_0^1 dx \cdot \int_0^1 y^2 dy = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 + x \Big|_0^1 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12};$$

$$D(X) = \int_0^1 \int_0^1 x^2(x+y) dx dy - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \int_0^1 x^3 dx \cdot \int_0^1 dy + \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 y dy - \frac{49}{144} =$$

$$= \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \cdot y \Big|_0^1 + \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{49}{144} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + -\frac{49}{144} = \frac{11}{144};$$

$$D(Y) = \int_0^1 \int_0^1 y^2(x+y) dx dy - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 y^2 dy + \int_0^1 dx \cdot \int_0^1 y^3 dy - \frac{49}{144} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 + x \Big|_0^1 \cdot \frac{y^4}{4} \Big|_0^1 - \frac{49}{144} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + -\frac{49}{144} = \frac{11}{144};$$

$$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{\frac{11}{144}} = \frac{\sqrt{11}}{12};$$

$$\sigma(Y) = \sigma_y = \sqrt{\frac{11}{144}} = \frac{\sqrt{11}}{12}.$$

Важливими чисельними характеристиками двовимірної випадкової величини (X, Y) є *коваріація* (або *кореляційний момент*) і *коефіцієнт кореляції*, які певною мірою відіграють роль показників взаємозв'язку між компонентами X і Y .

Коваріацією (кореляційним моментом) двовимірної випадкової величини (X, Y) називається математичне сподівання добутку відхилень складових цієї величини від їх математичних сподівань:

$$K_{xy} = M\{[X - M(X)] \cdot [Y - M(Y)]\}. \quad (2.90)$$

Використовуючи означення математичного сподівання, одержимо:

- для дискретного розподілення

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [x_i - M(X)][y_j - M(Y)]p(x_i, y_j) \quad (2.91)$$

- для безперервного розподілення

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)][y - M(Y)]f(x, y)dx dy \quad (2.91')$$

Коваріацію K_{xy} часто зручно виражати співвідношенням:

$$K_{xy} = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y) \quad (2.92),$$

яке отримують з рівняння (2.90) безпосереднім обчисленням з використанням властивостей математичного сподівання:

$$\begin{aligned} K_{xy} &= M[X \cdot Y - Y \cdot M(X) - X \cdot M(Y) + M(X) \cdot M(Y)] = \\ &= M(X \cdot Y) - M[X \cdot M(Y)] - M[Y \cdot M(X)] + M[M(X) \cdot M(Y)] = \\ &= M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y) - M(Y) \cdot M(X) + M(X) \cdot M(Y) = \\ &= M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y). \end{aligned}$$

Співвідношення (2.92) у випадках дискретного і безперервного розподілення набуває вигляду:

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p(x_i, y_j) - M(X) \cdot M(Y), \quad (2.93)$$

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy - M(X) \cdot M(Y) \quad (2.93')$$

Для незалежних випадкових величин коваріація дорівнює нулю.

Дане твердження є простим наслідком співвідношення (2.92), тому що математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань цих величин.

Коваріація двох випадкових величин (X, Y) характеризує не лише ступінь залежності випадкових величин, а і їх розсіювання навколо точки $(M(X), M(Y))$ на площині.

Розмірність коваріації дорівнює добутку розмірностей випадкових величин X і Y для того, щоб отримати безрозмірну величину, до того ж таку, яка характеризує лише залежність між випадковими величинами, а не їх розсіювання, вводиться поняття коефіцієнта кореляції.

Коефіцієнтом кореляції двовимірної випадкової величини (X, Y) називається відношення коваріації K_{xy} до добутку середніх квадратичних відхилень σ_x і σ_y цих величин:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}. \quad (2.94)$$

Отже, величина r_{xy} характеризує ступінь залежності випадкових величин X і Y , а саме *лінійної залежності*, яка проявляється в тому, що зі зростанням однієї випадкової величини друга має тенденцію також зростати або спадати: у першому випадку $r_{xy} > 0$ і кажуть про *додатню кореляційну залежність* випадкових величин X і Y ; у другому - $r_{xy} < 0$ говорять про *від'ємну кореляційну залежність* випадкових величин.

Для будь яких двох випадкових величин X і Y :

$$|r_{xy}| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq r_{xy} \leq 1. \quad (2.95)$$

Модуль коефіцієнта кореляції випадкових величин X і Y характеризує *ступінь тісноти лінійної залежності між ними*. Якщо лінійної залежності немає, то $r_{xy} = 0$. Якщо між випадковими величинами існує функціональна лінійна залежність:

$$Y = b_1 X + b_0,$$

то $r_{xy} = +1$ при $b_1 > 0$ і $r_{xy} = -1$ при $b_1 < 0$.

Дві випадкові величини X і Y називаються *корельованими*, якщо коваріація $K_{xy} \neq 0$ (або коефіцієнт кореляції $r_{xy} \neq 0$), і *некорельованими*, якщо $K_{xy} = 0$ (або коефіцієнт кореляції $r_{xy} = 0$).

Легко переконатися, що дві корельовані випадкові величини є також залежні. Обернене твердження правильне не завжди, тобто якщо дві випадкові величини залежні, то вони можуть бути як корельованими, так і некорельованими.

Приклад 2.23. Для двовимірної випадкової величини, яку задано таблицею задачі (2.21), обчислити K_{xy} і r_{xy} і зробити висновок про корельованість її компонент.

Розв'язок:

Обчислюємо коваріацію за формулою (2.93):

$$K_{xy} = 3 \cdot (-2) \cdot 0,17 + 3 \cdot 4 \cdot 0,22 + 3 \cdot 6 \cdot 0,21 + 5 \cdot (-2) \cdot 0,33 + 5 \cdot 4 \cdot 0,18 + 5 \cdot 6 \cdot 0,19 - 3,6 \cdot 3,8 = 0,72$$

За формулою (2.94) розраховуємо коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{0,72}{2,94 \cdot 0,98} = 0,25.$$

Оскільки $r_{xy} > 0$, то між заданими величинами X і Y існує додатній кореляційний зв'язок.

Приклад 2.24 Для двовимірної випадкової величини (X, Y) , яка задана густиною розподілення задачі (2.22), обчислити K_{xy} і r_{xy} і зробити висновок про корельованість її компонент.

Розв'язок.

В задачі (2.22) обчислені чисельні характеристики складових двовимірної випадкової величини:

$$M(X) = 7/12; M(Y) = 7/12; \sigma_x = \frac{\sqrt{11}}{12}; \sigma_y = \frac{\sqrt{11}}{12}.$$

За формулою (2.93')

$$\begin{aligned}
 K_{xy} &= \int_0^1 \int_0^1 xyf(x, y) dx dy - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = \\
 &= \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 y dy + \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 y^2 dy - \frac{49}{144} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{49}{144} = -\frac{1}{144}
 \end{aligned}$$

За формулою (2.94) розраховуємо коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{-1/144}{\sqrt{11/12} \cdot \sqrt{11/12}} \approx -0,09$$

Оскільки $r_{xy} < 0$, то між величинами X та Y існує від'ємна кореляційна залежність.

Легко переконатись, що задані величини є залежними:

$$f_1(x) = \int_0^1 (x+y) dy = \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = x + \frac{1}{2};$$

$$f_2(y) = \int_0^1 (x+y) dx = \left(xy + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = y + \frac{1}{2};$$

$$f(x, y) = x + y \neq \left(x + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(y + \frac{1}{2} \right) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Таким чином, X і Y є корельованими і залежними.

2.10. Умовні чисельні характеристики двовимірної випадкової величини

До умовних чисельних характеристик однієї з випадкових величин, які є складовими системи (X, Y) , відносять умовне математичне сподівання, умовну дисперсію та умовне середньоквадратичне відхилення. Ці характеристики визначають на підставі умовних законів розподілення.

А. Випадок дискретної випадкової величини

Для дискретної випадкової величини (X, Y) умовні чисельні характеристики обчислюють за формулами:

- *умовні математичні сподівання:*

$$\begin{aligned} M(X|Y = y_j) &= \sum_{i=1}^n x_i p(x_i|y_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{1}{p(y_j)} \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i, y_j), \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} M(Y|X = x_i) &= \sum_{j=1}^m y_j p(y_j|x_i) = \\ &= \sum_{j=1}^m y_j \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)} = \frac{1}{p(x_i)} \sum_{j=1}^m y_j \cdot p(x_i, y_j), \end{aligned} \quad (2.96')$$

- *умовні дисперсії:*

$$\begin{aligned} D(X|Y = y_j) &= \sum_{i=1}^n x_i^2 p(x_i|y_j) - M^2(X|Y = y_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} - M^2(X|Y = y_j) = \\ &= \frac{1}{p(y_j)} \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p(x_i, y_j) - M^2(X|Y = y_j), \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} D(Y|X = x_i) &= \sum_{j=1}^m y_j^2 p(y_j|x_i) - M^2(Y|X = x_i) = \\ &= \sum_{j=1}^m y_j^2 \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)} - M^2(Y|X = x_i) = \\ &= \frac{1}{p(x_i)} \sum_{j=1}^m y_j^2 \cdot p(x_i, y_j) - M^2(Y|X = x_i), \end{aligned} \quad (2.97')$$

- *умовні середньоквадратичні відхилення:*

$$\sigma(X|Y = y_j) = \sqrt{D(X|Y = y_j)}; \quad (2.98)$$

$$\sigma(Y|X = x_i) = \sqrt{D(Y|X = x_i)} \quad (2.98')$$

Приклад 2.25 Закон розподілення двовимірної випадкової величини (X, Y) задано таблицею (2.17):

$y \backslash x$	10	20	30	40	$p(y_j)$
-8	0,01	0,03	0,02	0,04	0,1
-4	0,07	0,1	0,07	0,06	0,3
-2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,6
$p(x_i)$	0,18	0,33	0,19	0,3	

Обчислити $M(X|Y = -4)$, $M(Y|X = 40)$, $\sigma(X|Y = -4)$, $\sigma(Y|X = 40)$.

Розв'язок:

За формулами (2.96-2.98) маємо:

$$M(X|Y = -4) = \frac{1}{p(y_2)} \sum_{i=1}^4 x_i \cdot p(x_i, y_2) =$$

$$= \frac{1}{0,3} (10 \cdot 0,07 + 20 \cdot 0,1 + 30 \cdot 0,07 + 40 \cdot 0,06) = 24;$$

$$D(X|Y = -4) = \frac{1}{p(y_2)} \sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot p(x_i, y_2) - M^2(X|Y = -4) =$$

$$= \frac{1}{0,3} (100 \cdot 0,07 + 400 \cdot 0,1 + 900 \cdot 0,07 + 1600 \cdot 0,06) - 110,7 =$$

$$\sigma(X|Y = -4) = \sqrt{D(X|Y = -4)} = \sqrt{110,7} \approx 10,5.$$

За формулами (2.96'-2.98') маємо:

$$M(Y|X=40) = \frac{1}{0,3}(-8 \cdot 0,04 - 4 \cdot 0,06 - 2 \cdot 0,2) = -3,2;$$

$$D(Y|X=40) = \frac{1}{p(x_4)} \sum_{j=1}^3 y_j^2 \cdot p(y_j, x_4) - M^2(Y|X=40) = \\ = \frac{1}{0,3}(64 \cdot 0,04 + 16 \cdot 0,06 + 4 \cdot 0,2) - (3,2)^2 = 4,16;$$

$$\sigma(Y|X=40) = \sqrt{4,16} \approx 2,04.$$

Б. Випадок безперервної випадкової величини

Основні чисельні характеристики умовного розподілення ймовірностей складових безперервної двовимірної випадкової величини визначаються наступними формулами:

- умовні математичні сподівання:

$$M(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x|y)dx, \quad (2.99)$$

$$M(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\psi(y|x)dy; \quad (2.99')$$

- умовні дисперсії:

$$D(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x|y)dx - M^2(X|Y=y), \quad (2.100)$$

$$D(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\psi(y|x)dy - M^2(Y|X=x); \quad (2.100')$$

- умовні середньоквадратичні відхилення:

$$\sigma(X|Y=y) = \sqrt{D(X|Y=y)}, \quad (2.101)$$

$$\sigma(Y|X=x) = \sqrt{D(Y|X=x)}. \quad (2.101')$$

Приклад 2.26. На підставі даних прикладу 2.18 обчислити $M(X|Y=y)$, $M(Y|X=x)$.

Розв'язок:

Умовні густини розподілу були знайдені в *прикладі 2.20*:

$$\varphi(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \frac{x+y}{y+\frac{1}{2}}, & x \in (0;1); \\ 0, & x \notin (0;1), \end{cases}$$

де $y \in (0;1)$ – фіксоване;

$$\psi(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}, & y \in (0;1); \\ 0, & y \notin (0;1), \end{cases}$$

де $x \in (0;1)$ – фіксоване.

Умовні математичні сподівання розраховуємо за формулами (2.99) і (2.99'):

$$\begin{aligned}
M(X|Y=y) &= \int_0^1 x\varphi(x|y) dx = \frac{1}{y+0,5} \int_0^1 x(x+y) dx = \\
&= \frac{1}{y+0,5} \left[\int_0^1 x^2 dx + y \int_0^1 x dx \right] = \frac{1}{y+0,5} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{y \cdot x^2}{2} \Big|_0^1 \right) = \\
&= \frac{1}{y+0,5} \left[\frac{1}{3} + \frac{y}{2} \right] = \frac{3y+2}{6y+3};
\end{aligned}$$

$$y \in (0;1);$$

$$\begin{aligned}
M(Y|X=x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y\psi(y|x) dy = \frac{1}{x+0,5} \int_0^1 y(x+y) dy = \\
&= \frac{1}{x+0,5} \left[x \int_0^1 y dy + \int_0^1 y^2 dy \right] = \frac{1}{x+0,5} \left(\frac{x \cdot y^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 \right) = \\
&= \frac{1}{x+0,5} \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \right] = \frac{3x+2}{6(x+0,5)} = \frac{3x+2}{6x+3};
\end{aligned}$$

$$x \in (0;1).$$

Умовне математичне сподівання випадкової величини Y при заданому $X = x$: $M(Y|X=x) = f(x)$ називається **регресією Y на X** ; аналогічно $M(X|Y=y) = g(y)$ називається **регресією X на Y** . Графіки цих залежностей від x та y називаються лініями регресії, або «кривими регресії» Y на X і X на Y , відповідно.

Питання для самостійного повторення

Замість крапок запишіть таке продовження тексту, щоб отримати правильне означення або твердження. Де можливо запишіть відповідну формулу.

1. Дискретною називають випадкову величину, яка...
2. Умовою нормування випадкової величини називається...
3. Законом розподілення дискретної випадкової величини називається...
4. Формула, що виражає закон розподілення Пуассона, записується як...
5. Безперервною випадковою називають величину, яка...
6. Двовимірною називають випадкову величину, яка...
7. Імовірність попадання випадкової величини на відрізок $\alpha < x < \beta$ дорівнює...
8. Математичним сподіванням дискретної випадкової величини визначається як...
9. Властивості математичного сподівання:...
10. Дисперсією називається...
11. Другий початковий момент можна записати як...
12. Математичне сподівання та дисперсію випадкової величини, яка підкоряється розподіленню Пуассона: ...
13. Властивості дисперсії:...
14. Середньо квадратичне відхилення – це...
15. Нормальний закон розподілення має таку густину ймовірності...
16. Математичне сподівання та дисперсію для нормального закону розподілення можна записати як...
17. Функція Лапласа та її властивості:...
18. Ймовірність знаходження безперервної випадкової величини x , що підкоряється нормальному закону, на відрізку $(m - l; m + l)$, який розташований симетрично відносно математичного сподівання m , дорівнює...
19. Центральна гранична теорема формулюється наступним чином...
20. Формулювання локальної теореми Лапласа:...
21. n – Вимірною випадковою величиною називають...

22. Законом розподілення ймовірностей двовимірної дискретної випадкової величини називається ...

23. Функцією розподілення ймовірностей двовимірної випадкової величини (x, y) називається...

24. Для функції розподілення $F(x, y)$ двовимірної випадкової величини виконуються граничні співвідношення: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = \dots$,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = \dots, \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = \dots, \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = \dots .$$

25. Функція розподілу $F(x, y)$ двовимірної випадкової величини (X, Y) пов'язана з функціями розподілення $F_1(x)$ і $F_2(y)$ складових X і Y такими співвідношеннями...

26. Імовірність попадання значень безперервної двовимірної випадкової величини (X, Y) у прямокутник $Q = \{ (x, y) : a < x < b, c < y < d \}$ виражається через її функцію розподілення формулою...

27. Густиною розподілення ймовірностей $f(x, y)$ двовимірної неперервної випадкової величини (x, y) називають...

28. Якщо $f(x, y)$ - двовимірна густина розподілення, то
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \dots$$

29. Якщо $f(x, y)$ - двовимірна густина розподілення випадкової величини (X, Y) , всі значення якої містяться в прямокутнику $Q = \{ (x, y) : a$

$< x < b, c < y < d \}$, то
$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \dots$$

30. Математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$ складових X і Y двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) обчислюються за формулами...

31. Математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$ складових X і Y двовимірної безперервної випадкової величини (X, Y) обчислюються за формулами...

32. Дисперсії $D(X)$ і $D(Y)$ складових X і Y двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) обчислюються за формулами...

33. Дисперсії $D(X)$ і $D(Y)$ складових X і Y двовимірної безперервної випадкової величини (X, Y) обчислюються за формулами...
34. Середньоквадратичні відхилення $\sigma(X)$ і $\sigma(Y)$ складових X і Y двовимірних дискретної і безперервної випадкових величин (X, Y) обчислюються за формулами...
35. Коваріація K_{xy} двовимірної випадкової величини (X, Y) – це...
36. Коефіцієнт кореляції r_{xy} двовимірної випадкової величини (X, Y) – це...
37. Якщо коефіцієнт кореляції r_{xy} двовимірної випадкової величини (X, Y) не дорівнює нулю, то її складові X і Y є....
38. Корельовані і некорельовані випадкові величини X і Y .
39. Для безперервних випадкових величин необхідна і достатня умова незалежності x і y виражається...
40. Умовним законом розподілення складової X двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) за фіксованого значення $Y=y_j$ називається....
41. Умовною густиною $\varphi(x|y)$ розподілення ймовірностей складової x двовимірної безперервної величини (x, y) за фіксованого значення y називається...
42. Умовною густиною $\psi(y|x)$ розподілення ймовірностей складової y двовимірної безперервної величини (x, y) за фіксованого значення x називається...
43. Умовні чисельні характеристики складових X і Y дискретної та безперервної випадкової величини (x, y) виражаються формулами: ...
44. Функцією регресії Y на X називається.... і функцією регресії X на Y називається...

Задачі для самостійного розв'язку

1. В грошовій лотереї випущено 1000 квитків. Розігрують один виграш в 1000 грн., чотири – по 500 грн., п'ять – по 400 грн., десять – по 200 грн. Знайти закон розподілення вартості виграшу для володаря одного лотерейного квитка (у вигляді таблиці).

Відповідь:

x	1000	500	400	200	0
$p \cdot 10^3$	1	4	5	10	980

2. Монету підкидають 4 рази. Записати закон розподілу ймовірностей випадкових величин X – числа появи герба.

Відповідь:

x	4	3	2	1	0
p	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

3. Знайти математичне сподівання випадкової величини X , якщо відомий закон її розподілення:

X	3	5	2
P	0,1	0,6	0,3

Відповідь: $M[X] = 3,9$.

4. Знайти математичне сподівання числа появи події A в одному досліді, якщо ймовірність появи A дорівнює P .

Відповідь: $M[X] = P$.

5. Виконується 3 постріли з ймовірністю влучення в мішень $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,3$; $p_3 = 0,6$. Знайти математичне сподівання загального числа влучень.

Відповідь: $M[X] = 1,3$

6. Знайти математичне сподівання суми числа очок, яка може з'явитися при киданні двох гральних кісток.

Відповідь: $M[X] = 7$.

7. Незалежні випадкові величини X та Y задані наступним законом розподілення:

x	5	2	4
p	0,6	0,1	0,3

y	7	9
p	0,8	0,2

Знайти математичне сподівання випадкової величини XY .

Відповідь: $M[XY] = 32,56$.

8. Знайти дисперсію випадкової величини X , яка задана таким законом розподілу:

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

Відповідь: $D[X] = 2,01$.

9. Знайти дисперсію випадкової величини X , яка задана таким законом розподілу:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Відповідь: $D[X] = 1,05$.

10. Знайти дисперсію і середньоквадратичне відхилення дискретної випадкової величини X , яка задана таким законом розподілу:

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Відповідь: $D[X] = 15,21$;

$\sigma[X] = 3,9$.

11. Дискретна випадкова величина X має тільки два можливі значення x_1 та x_2 , причому рівноймовірні. Довести, що дисперсія величини x дорівнює квадрату напіввізниць можливих значень:

$$D(x) = \left[\frac{x_2 - x_1}{2} \right]^2.$$

12. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини X – числа появи події A в п'яти незалежних дослідах, якщо ймовірність появи події A в кожному досліді дорівнює 0,2.

Відповідь: $D[X] = 0,8$.

13. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини X – числа появи події A в двох незалежних дослідах, якщо ймовірність появи події в цих дослідах однакова і відомо, що математичне сподівання $M[x] = 1,2$.

Відповідь: $D[X] = 0,48$.

14. Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: X_1 та X_2 , причому $X_1 < X_2$. Ймовірність того, що X прийме значення X_1 , дорівнює 0,6. Знайти закон розподілення величини X , якщо математичне сподівання та дисперсія відомі: $M[x] = 1,4$; $D[X] = 0,24$.

Відповідь: $X_1=1; X_2=2$

15. Підкинуто n гральних кубиків. Знайти дисперсію суми числа очок, які з'являться на всіх кубиках, що випали.

Відповідь: $D[X] = 2,917n$.

16. Ймовірність того, що стрілець попаде в мішень з одного пострілу дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах стрілець попаде в мішень:

- а) не менш ніж 71 раз та не більше за 80 раз;
- б) не менше за 81 раз.

Відповідь: $P_{100}(71,80) = 0,6961;$

$P_{100}(81,100) = 0,0838$.

17. Знайти ймовірність того, що при складанні заліку з 100 студентів не складуть його не менше ніж 10 та не більше за 30, якщо ймовірність отримання заліку складає 0,8.

Відповідь: $p=0,988$

18. Знайти ймовірність того, що при складанні заліку з 112 студентів складуть його не менше ніж 93, якщо ймовірність не отримати залік складає 0,1.

Відповідь: $p= 0,99$.

19. Одночасно кидають дві монети. Написати закон розподілення двовимірної випадкової величини (X, Y) , де X – число випадань герба на першій монеті, Y – число випадань герба на другій монеті.

20. Для якого значення a наведена таблиця виражає закон розподілення деякої двовимірної випадкової величини (X, Y) ?

x_i	-2	0	1	4	6
y_i					
2	0,7a	a	1,3a	0,5a	2a
5	0,9a	0,4a	1,4a	1,6a	0,2a

Відповідь: $a = 0,1$.

21. Двовимірна випадкова величина (X, Y) задана функцією розподілення:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \dots \dots \dots x \leq 0 \text{ або } y \leq 0; \\ \sin x, & \dots \dots \dots 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \dots y > \frac{\pi}{2}; \\ \sin x \sin y, & \dots \dots \dots 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \dots 0 < y \leq \frac{\pi}{2}; \\ \sin y, & \dots \dots \dots x > \frac{\pi}{2}, \dots \dots \dots 0 < y \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & \dots \dots \dots x > \frac{\pi}{2}, \dots \dots \dots y > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Обчислити $P(\pi/6 < X < \pi/2, \pi/4 < Y < \pi/3)$.

Знайти густину розподілення ймовірностей двовимірної випадкової величини (X, Y) .

Відповідь: 0,08;

$$f(x, y) = \begin{cases} \cos x \cos y, & \dots (x, y) \in \Omega \\ 0, & \dots \dots \dots (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

22. Закон розподілення двовимірної випадкової величини (X, Y) задано таблицею:

x_i	-1	2	4
y_i			
3	0,1	0,2	0,1

5	0,2	0,1	0,3
---	-----	-----	-----

Обчислити а) $P(-1 < X \leq 4 \cap Y = 5)$; б) $M(X) \cdot M(Y)$; в) $D(X) - D(Y)$;
г) $\sigma(X) + \sigma(Y)$; д) r_{xy} .

Відповідь: а) 0,4;

б) 7,98;

в) 3,33;

г) 3,05;

д) 0,06.

23. Двовимірна випадкова величина (X, Y) задана густиною розподілення:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{64}, & \dots (x, y) \in \Omega; \\ 0, & \dots (x, y) \notin \Omega, \end{cases}$$

де $\Omega = \{(x, y): -6 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 5\}$.

Обчислити: а) $P(0 < X < 2, 0 < Y < 5)$; б) $M(X) + M(Y)$; в) $D(X) - D(Y)$;

г) $\sigma(X) \cdot \sigma(Y)$; д) r_{xy} ; е) закони розподілення складових $f_1(X), f_2(Y)$.

Відповідь: а) 5/32;

б) -1;

в) 0;

г) 16/3;

д) 0;

е) $f_1(x) = 1/8; f_2(x) = 1/8$.

24. Двовимірна випадкова величина (X, Y) задана густиною:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \dots x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \dots x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Обчислити K_{xy} і r_{xy} і зробити висновок про корельованість її компонент.

Відповідь: $K_{xy} = r_{xy} = 0$.

25. Густина сумісного розподілення системи випадкових величин (X, Y) задана функцією:

$$f(x, y) = ae^{-x^2 - y^2}, \quad a = \text{const}, \quad -\infty < x, y < \infty.$$

Знайти a та обчислити регресії Y на X і X на Y .

Відповідь: $a = 1/\pi$;

$$M(X|Y = y) = M(Y|X = x) = 0.$$

ГЛАВА 3

ТЕОРІЯ ПОМИЛОК

3.1. Оцінки числових характеристик. Рівноточні вимірювання

Нормальний закон, як відомо, описується двома параметрами: математичним сподіванням та дисперсією. У теорії помилок математичне сподівання відповідає точному, не спотвореному дією випадкових факторів, значенню вимірів деякої величини, а дисперсія визначає розсіяння експериментальних даних навколо їх точного значення.

У попередніх розділах було відмічено, що для знаходження закону розподілення потрібно мати в своєму розпорядженні достатньо великий статистичний матеріал. Проте на практиці часто доводиться мати справу із статистичним матеріалом обмеженого об'єму (*вибіркою*) - одним-двома десятками спостережень, часто навіть менше. Це звичайно пов'язано із складністю постановки кожного досліду. Такого обмеженого матеріалу явно недостатньо для того, щоб знайти наперед невідомий закон розподілення випадкової величини, але цей матеріал може бути оброблений і використаний для отримання деяких відомостей про випадкову величину. Наприклад, на основі обмеженого статистичного матеріалу можна визначити хоч б орієнтовно найважливіші числові характеристики випадкової величини: математичне сподівання та дисперсію.

Перш за все потрібно відзначити, що будь-який параметр, обчислений на основі обмеженого числа дослідів, завжди містить елемент випадковості. Таке наближене значення назовемо *оцінкою* параметра. Наприклад, оцінкою математичного сподівання (при рівноточних вимірюваннях) є *вибіркове середнє арифметичне* значення випадкової величини в n незалежних дослідах. При дуже великому числі

дослідів середнє арифметичне з великою ймовірністю наближається до математичного сподівання. Якщо ж число дослідів невелике, то заміна математичного сподівання середнім арифметичним призводить до якоїсь помилки. Ця помилка тим більше, чим менше число дослідів. Так само і з оцінками інших параметрів. Будь-яка з таких оцінок є випадковою і при користуванні нею неминучі помилки. Бажано вибрати таку оцінку, щоб ці помилки були мінімальними.

Розглянемо наступну загальну задачу. Є випадкова величина X_i , закон розподілення якої містить невідомий параметр a . Потрібно знайти відповідну оцінку для параметра a за результатами n незалежних дослідів, в кожному з яких величина X прийняла певне значення: X_1, X_2, \dots, X_n . Їх можна розглядати як n незалежних значень випадкової величини X , кожна з яких розподілена по тому ж закону, що і випадкова величина X .

Позначимо через \tilde{a} оцінку для параметра a . Будь-яка оцінка, що обчислюється, повинна бути функцією величин X_1, X_2, \dots, X_n : $\tilde{a} = \tilde{a}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, і, отже, сама є величиною випадковою. Закон розподілення \tilde{a} залежить, по-перше, від закону розподілення величини X (і, зокрема, від самого невідомого параметра a); по-друге, від числа дослідів. Цей закон розподілення можна знайти методами теорії ймовірностей.

Пред'явимо до оцінки \tilde{a} ряд вимог, яким вона повинна задовольняти, щоб бути «доброякісною» оцінкою. Природно зажадати від оцінки \tilde{a} , щоб при збільшенні числа дослідів n вона наближалася (сходилася за ймовірністю) до параметра a . Оцінка, що володіє такою властивістю, називається *обґрунтованою*. Крім того, бажано, щоб при користуванні величиною \tilde{a} замість a , принаймні, не робилось систематичної помилки у бік завищення, чи заниження, тобто

виконувалася умова: $M[\tilde{a}] = a$. Оцінка, що має таку властивість називається *незміщеною*. Також бажано, щоб незміщена оцінка мала найменшу дисперсію: $D[\tilde{a}] = \min$. Оцінка із такою властивістю називається *ефективною*.

Оцінкою для математичного сподівання (при рівноточних вимірюваннях) є *вибіркове середнє арифметичне* значення випадкової величини:

$$\tilde{m}_x = \bar{x} = m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}. \quad (3.1)$$

Ця оцінка є обґрунтованою. У відповідності із *законом великих чисел*, при збільшенні n величина \tilde{m}_x збігається за ймовірністю із m_x . Оцінка \tilde{m}_x також є незміщеною, тому що:

$$M[\tilde{m}_x] = M[\bar{x}] = M\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] = \frac{1}{n} M\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{\sum_{i=1}^n M[x_i]}{n} = \frac{n \cdot m_x}{n} = m_x. \quad (3.2)$$

Дисперсія цієї оцінки дорівнює:

$$D[\tilde{m}_x] = D[\bar{x}] = D\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{\sum_{i=1}^n D[x_i]}{n^2} = \frac{nD_x}{n^2} = \frac{D_x}{n};$$

$$D[\bar{x}] = \frac{D_x}{n} \quad (3.3)$$

тобто дисперсія середнього арифметичного в n разів менша за дисперсію величини X , що вимірюють. З формули (3.3) видно, що ефективність оцінки росте із збільшенням числа дослідів n .

Розглянемо як оцінку для дисперсії її статистичний аналог:

$$D_x^* = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2 p_i^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}; \quad (3.4)$$

при $n \rightarrow \infty$ $m_x^* \rightarrow m_x$; $p_i^* \rightarrow p_i$ та $D_x^* \rightarrow D_x$.

Ці міркування показують, що D_x^* обґрунтована оцінка для D_x .

Дисперсія D_x^* дорівнює:

$$D[D_x^*] = \frac{2}{n} D_x^2, \quad (3.5)$$

тобто як і у випадку із оцінкою m_x ефективність оцінки дисперсії зростає із ростом кількості дослідів. Введемо також статистичний аналог для початкового моменту:

$$\alpha_2^*[x] = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} \quad (3.6)$$

Між D_x^* та α_2^* існує такий же самий зв'язок, що і між D_x та $\alpha_2[x]$, а саме:

$$\alpha_2^*[x] = D_x^* + (m_x^*)^2 \quad (3.7)$$

Перевіримо D_x^* на зміщеність:

$$\begin{aligned}
 M[D_x^*] &= M\left\{\alpha_2^*[x] - (m_x^*)^2\right\} = M\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}\right] - M[(m_x^*)^2] = \\
 &= \frac{1}{n} M\left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right] - \alpha_2[m_x^*] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[x_i^2] - \left\{D[m_x^*] + (M[m_x^*])^2\right\} = \\
 &= \frac{n\alpha_2[x]}{n} - \left[\frac{D_x}{n} + m_x^2\right] = \alpha_2[x] - m_x^2 - \frac{D_x}{n} = \\
 &= D_x - \frac{D_x}{n} = D_x \left(\frac{n-1}{n}\right)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Отже, оцінка D_x^* виявилась зміщеною. Незміщеною вона стане при множенні на $\left(\frac{n}{n-1}\right)$, тому правильною оцінкою для *вибіркової дисперсії* є величина:

$$\tilde{D}_x = D_x^* \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \tag{3.9}$$

При великих значеннях n вибіркву дисперсію можна визначати формулою (3.4).

Для того щоб щоразу не робити подібних міркувань, при визначенні деяких вибіркових характеристик у математичній статистиці введено поняття про ступінь свободи. *Число ступенів свободи f* вибіркової характеристики визначається як повне число незалежних спостережень за винятком числа зв'язків, що накладаються на

результати окремих спостережень при обчисленні розглянутої характеристики. У застосуванні до формули (3.9), число ступенів свободи повинне бути $f = n - 1$, оскільки при обчисленні D_x загальне число спостережень n і використана величина \bar{x} , обчислення якої зв'язує результати спостережень формулою (3.1).

Оцінка для *вибіркового середньоквадратичного (стандартного) відхилення* випадкової величини X :

$$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{\tilde{D}_x} \quad (3.10)$$

називається *середньоквадратичною помилкою* виміряної величини X . З урахуванням (3.3) середньоквадратична помилка середнього арифметичного в \sqrt{n} разів менша середньоквадратичної помилки виміряної величини X , тобто:

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}}. \quad (3.11)$$

Приклад 3.1. Знайти значення \tilde{m}_x , $\tilde{\sigma}_x$, $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$ для 10 рівноточних вимірювань.

Таблиця 3.1

$(x'_i)^2$	$x'_i = x_i - 21$	x_i	$x_i - \tilde{m}_x$	$(x_i - \tilde{m}_x)^2$
0,00	0,00	21,00	- 0,20	0,04
0,04	0,20	21,20	0,00	0,00
0,16	0,40	21,40	+ 0,20	0,04

Продовження таблиці 3.1

	$(x'_i)^2$	$x'_i = x_i - 21$	x_i	$x_i - \tilde{m}_x$	$(x_i - \tilde{m}_x)^2$
	0,09	0,30	21,30	+ 0,10	0,01
	0,25	0,50	21,50	+ 0,30	0,09
	0,00	0,00	21,00	- 0,20	0,04
	0,01	- 0,10	20,90	- 0,30	0,09
	0,36	0,60	21,60	+ 0,40	0,16
	0,04	- 0,20	20,80	- 0,40	0,16
	0,09	0,30	21,30	+ 0,10	0,01
Σ	1,04	2,00	212,00	0,00	0,64

I спосіб (права частина табл.3.1).

$$\tilde{m}_x = \bar{x} = \frac{212,0}{10} = 21,2; \quad \tilde{D}_x = \frac{0,64}{10-1} = 0,071; \quad \tilde{\sigma}_x = \sqrt{0,071} = 0,266;$$

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x} = \frac{0,266}{\sqrt{10}} = 0,084.$$

II спосіб (ліва частина табл.3.1).

$$\tilde{m}'_x = \bar{x}' = \frac{2,0}{10} = 0,2; \quad \tilde{m}_x = \tilde{m}'_x + 21,0 = 21,2; \quad \alpha_2'[x] = \frac{1,04}{10} = 0,104;$$

$$\tilde{D}_x = \left\{ \tilde{\alpha}_2'[x] - (\tilde{m}'_x)^2 \right\} \cdot \frac{n}{n-1} = (0,104 - 0,040) \cdot \frac{10}{9} = 0,071$$

При розрахунках \tilde{D}_x через $\alpha_2^*[x]$ зручно перенести початок координат у точку, що розташована ближче до математичного сподівання. У протилежному випадку необхідно розраховувати оцінку дисперсії як різницю двох великих величин ($\alpha_2^*[x]$ та $(\tilde{m}_x)^2$).

3.2. Розподілення Стьюдента

Розподілення випадкової величини, аналогічної (2.40), у якій замість генерального середньоквадратичного відхилення стоїть відповідне вибіркве відхилення

$$t = \frac{x - m}{\tilde{\sigma}_x} \quad (3.12)$$

уперше був уведений Госсетом (псевдонім – Стьюдент). Функція щільності імовірності t -розподілу залежить тільки від одного параметра – числа ступенів свободи f вибіркової дисперсії \tilde{D}_x і визначається формулою

$$\varphi(t) = S_{n-1}(t) = \frac{1}{(\pi f)^{1/2}} \frac{\tilde{\Gamma}\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\tilde{\Gamma}\left(\frac{f}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{f}\right)^{-\frac{f+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty, \quad (3.13)$$

де символ Γ (гамма) означає відому гамма-функцію Ейлера, що представляє собою інтеграл

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{z-1} dy$$

Функція (3.13) теж симетрична відносно ординати з абсцисою $t = 0$. При значеннях $f > 20$ функція розподілення Стьюдента задовільно апроксимується функцією нормального розподілення, а при $f = \infty$ у точності збігається з нею. Однак при малих значеннях ступенів свободи, тобто при малому числі вимірів, розподілення Стьюдента істотно відрізняється від нормального. Так при $f = 1$ функція $\varphi(t)$ має меншу

максимальну ординату і значно повільніше зближається з віссю абсцис при $t \rightarrow \pm\infty$.

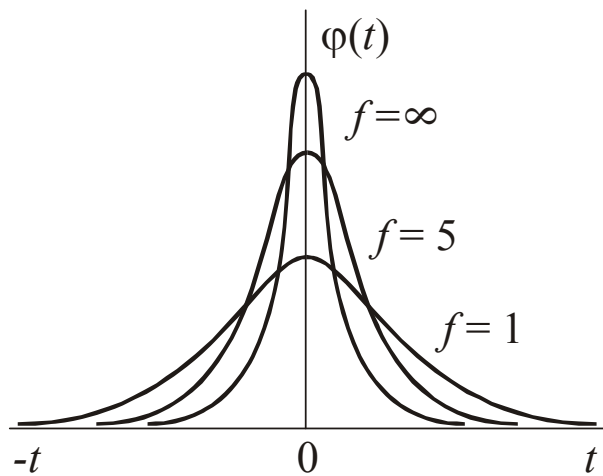


Рис.3.1. Розподілення Стюдента з різними значеннями f

Для середніх знову ж одержуємо

$$t = \frac{\bar{x} - m}{\tilde{\sigma}_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - m}{\tilde{\sigma}_x} \sqrt{n}. \quad (3.14)$$

Розподілення Стюдента знаходить широке застосування при обробці результатів вимірів, що підпорядковуються нормальному розподіленню. Необхідність використання розподілення Стюдента обумовлена обмеженістю числа спостережень, що перешкоджає визначенню в експерименті величини $\tilde{\sigma}_x$.

Визначення величини інтервалу, у якому може знаходитися випадкова величина t .

Якщо ймовірність β для випадкової величини t попасти в який-небудь інтервал задана, то границі шуканого інтервалу будуть

характеризуватися величинами $-t_{1-\beta}(f)$, $t_{1-\beta}(f)$, що залежать від числа ступенів свободи та визначаються з умов

$$P(-t_{1-\beta}(f) < t(f) < t_{1-\beta}(f)) = \beta. \quad (3.15)$$

Для практичного знаходження величин $t_{\beta}(f)$ є таблиці, у яких наведені величини $t(f)$ для ймовірностей $\beta = 0,1; 0,2; 0,3; \dots; 0,999$ і чисел ступенів свободи $f = 1, 2, \dots, \infty$.

Приклад 3.2. Знайти величину інтервалу, для якого ймовірність влучення випадкової величини t , що має один ступінь свободи, дорівнює 0,95.

Маємо $\beta = 0,95$, $\alpha = 1 - \beta = 0,05$, $f = 1$. За допомогою таблиці 4 додатка знаходимо $t_{0,95}(1) = 12,71$. Звідси шуканий інтервал дорівнює $(-12,71; +12,71)$.

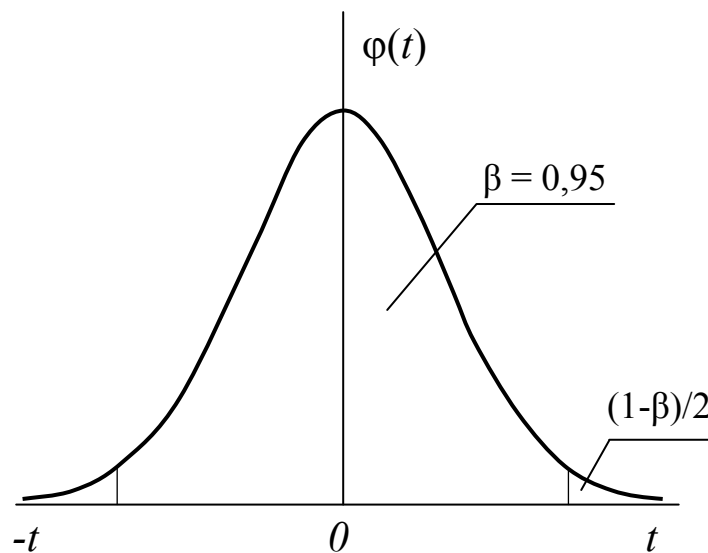


Рис. 3.2. Інтервал, у який може потрапляти величина t .

3.3. χ^2 -розподілення

Нехай є n незалежних випадкових величин x_1, x_2, \dots, x_n , кожна з яких підпорядковується нормальному закону розподілення з параметрами m і σ . Для кожної випадкової величини складемо вираз

$$U_i = \frac{x - m}{\tilde{\sigma}_x}. \quad (3.16)$$

Тоді сума квадратів випадкових величин

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n U_i^2 \quad (3.17)$$

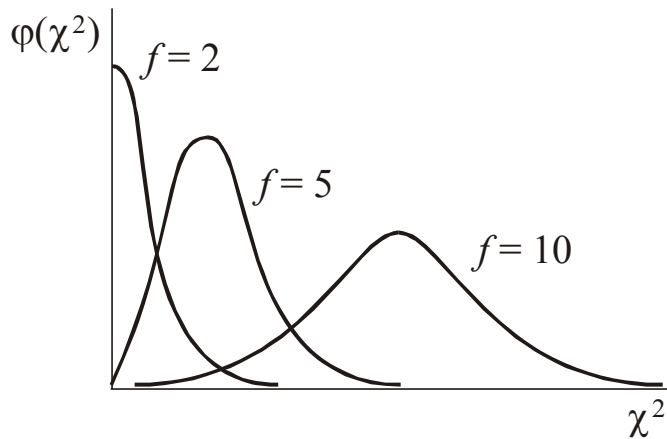
має закон розподілення, який називається χ^2 -розподіленням з $f = n$ ступенями свободи. Функція щільності імовірності χ^2 -розподілу визначається формулою

$$\varphi(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{f}{2}} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} (\chi^2)^{\frac{f}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \quad (3.18)$$

$$0 \leq \chi^2 < \infty$$

і залежить тільки від числа ступенів свободи f .

Характерною рисою кривих даного розподілу є явно виражена асиметрія, що зменшується з ростом f . Для розподілень $\varphi(\chi^2)$ також складені таблиці (див. табл. 5 додатка) значень $\chi_{1-\beta}^2(f)$ для числа ступенів свободи 1, 2, \dots , і ймовірностей $1 - \beta = 0,40; 0,30; 0,20; 0,10; 0,05; 0,025; 0,010; 0,005; 0,001; 0,0005$.

Рис. 3.3. χ^2 -розподілення з різними значеннями f

3.4. Розподілення Фішера

Нехай є дві системи незалежних спостережень випадкової величини ξ

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_{n_1}, \quad (3.19)$$

$$x''_1, x''_2, \dots, x''_{n_2},$$

з числами вимірів n_1 і n_2 і вибірковими дисперсіями \tilde{D}_{x_1} і \tilde{D}_{x_2} , відповідно. Якщо генеральні дисперсії D_{x_1} і D_{x_2} , що відповідають вибірковим дисперсіям \tilde{D}_{x_1} і \tilde{D}_{x_2} , належать однієї і тієї ж генеральній дисперсії, тобто має місце рівність

$$D_{x_1} = D_{x_2} = D_x, \quad (3.20)$$

то відношення вибірових дисперсій

$$F = \frac{\tilde{D}_{x1}}{\tilde{D}_{x2}} \quad (3.21)$$

є випадковою величиною, що підпорядковується закону розподілення з функцію щільності ймовірності:

$$\varphi(F) = \frac{\Gamma\left(f_1 + \frac{f_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{f_2}{2}\right)} f_1^{f_1/2} \cdot f_2^{f_2/2} \frac{F^{f_1/2} - 1}{(f_2 + f_1 F)^{f_1+f_2/2}}, \quad (3.22)$$

$$0 \leq F < \infty$$

де f_1 і f_2 – числа ступенів свободи дисперсій \tilde{D}_{x1} і \tilde{D}_{x2} , відповідно. Цей розподіл також асиметричний.

Параметр F прийнято записувати $F(f_1, f_2)$, де f_1 – число ступенів свободи чисельника в рівнянні (3.21), а f_2 – відповідно знаменника. При цьому в чисельнику ставлять більшу з порівнюваних дисперсій. Значення величини $F(f_1, f_2)$ табульовані для $1 - \beta = 0,50; 0,25; 0,10; 0,05; 0,025; 0,01; 0,005$ і чисел ступенів свободи $f_1 = 1, 2, \dots, \infty$ і $f_2 = 1, 2, \dots, \infty$ (див. табл. 6 додатка).

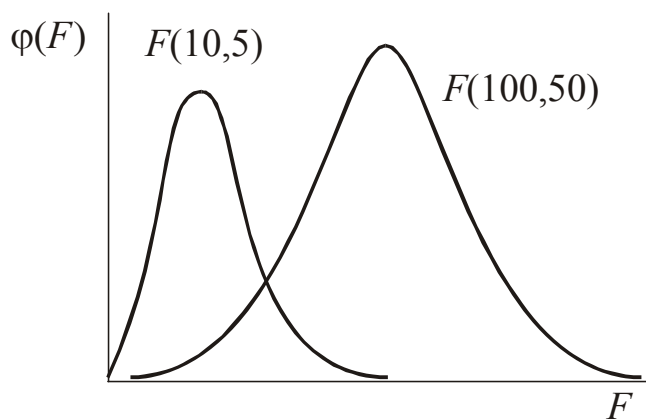


Рис. 3.4. Розподілення Фішера з різними значеннями f

3.5. Статистичні гіпотези та їх перевірка

Рішення багатьох науково-дослідних завдань здійснюються шляхом висунення відповідних гіпотез і подальшої їх експериментальної перевірки. При експериментальній перевірці гіпотез завжди необхідно враховувати той факт, що експериментальні дані є випадковими величинами. Тому гіпотези, сформульовані мовою тієї чи іншої науки і, зокрема, хімії, необхідно перевести на мову математичної статистики, тобто сформулювати статистичні гіпотези. Це дає можливість залучити для вирішення дослідницьких завдань весь арсенал методів математичної статистики, що, в свою чергу, значно підвищує надійність отриманих результатів та висновків. Приклади такого переведення будуть розглянуті пізніше. На даному ж етапі розглянемо загальні принципи перевірки статистичних гіпотез.

Статистичною гіпотезою називається припущення про те, що розглянута випадкова величина підпорядковується певному закону розподілення. Оцінка відповідності статистичної гіпотези експериментальним даним проводиться шляхом застосування певного правила, яке називається *статистичним критерієм*.

Статистичний критерій являє собою стандартний прийом оцінки відповідності висунутої гіпотези експериментальним даним. При цьому визнання задовільності згоди аналізованої гіпотези з експериментом, що встановлюється за допомогою відповідного критерію, аж ніяк не еквівалентно доказу її справедливості. Таке визнання означає лише те, що отримані експериментальні дані не суперечать гіпотезі, що перевіряється, і вона може бути робочою, принаймні до тих пір, поки в розпорядженні експериментатора не з'являться нові дані, які можуть внести корективи в інтерпретацію результатів експерименту.

Загальні принципи перевірки статистичних гіпотез

Нехай у нашому розпорядженні є величина x_0 – одне з можливих значень аналізованої випадкової величини X . Висунемо гіпотезу, яку

позначимо H_0 , про те, що випадкова величина X розподілена за законом, що характеризується заданою функцією густини ймовірності $\varphi_0(x)$. Гіпотезу H_0 назвемо *нуль-гіпотезою*.

Введемо також деяку *альтернативну гіпотезу* H_1 , зміст якої полягає в тому, що випадкова величина X підпорядковується закону розподілення, що описується функцією густини ймовірності $\varphi_1(x)$, і будемо вважати, що гіпотеза H_1 є істинною, якщо нуль-гіпотеза H_0 не вірна. Потрібно на підставі величини x_0 вирішити, який з гіпотез H_0 або H_1 слід віддати перевагу.

Розділимо область всіх можливих значень аналізованої випадкової величини на дві області (рис. 3.5). Область R_0 , яка відповідає гіпотезі H_0 , і область R_1 , яка відповідає гіпотезі H_1 . Нехай точка $x(R_0/R_1)$, що розділяє області R_0 і R_1 , є відомою. Тоді завдання побудови критерію вирішене.

Якщо

$$x_0 < x(R_0 / R_1), \quad (3.23)$$

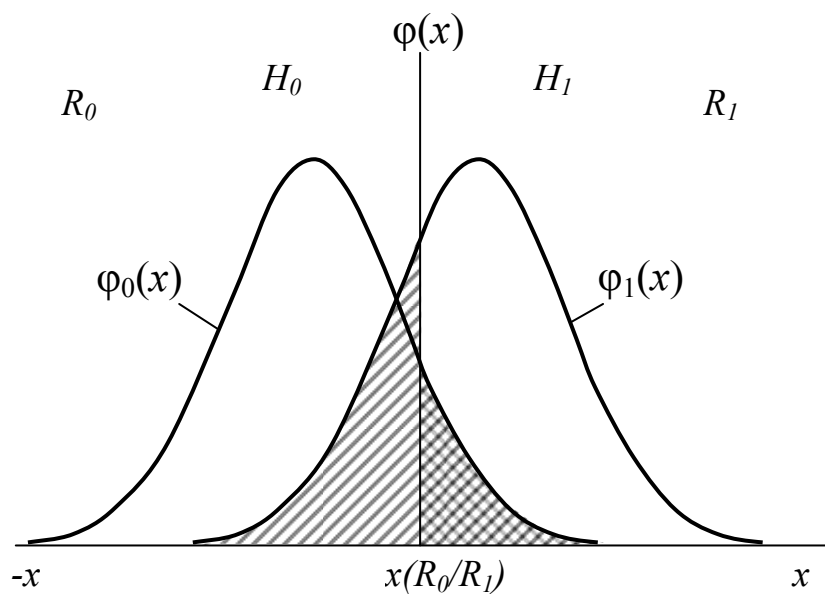


Рис. 3.5. Густина ймовірності розподілу величини x

то x_0 попадає в область R_0 отже слід прийняти гіпотезу H_0 . Якщо, навпаки,

$$x_0 > x(R_0 / R_1), \quad (3.24)$$

то x_0 виявляється в області R_1 альтернативної гіпотези H_1 , тож нуль-гіпотеза повинна бути відкинута. Таким чином, завдання побудови статистичного критерію зводиться до оптимального вибору граничної точки $x(R_0/R_1)$.

Однак, як би не вибиралася точку $x(R_0/R_1)$, завжди існує ймовірність неправильного рішення. Неважко помітити, що неправильне рішення може бути двох родів:

1. не прийняти нуль-гіпотезу, коли вона насправді вірна (тобто прийняти H_1 замість H_0);
2. прийняти нуль-гіпотезу, коли вона насправді невірна (тобто прийняти H_0 замість H_1);

Першу помилку прийнято називати *помилкою першого роду*, а другу – *помилкою другого роду*.

Хай насправді перевірена гіпотеза H_0 є вірною і, отже, випадкова величина X розподілена за законом, що задається функцією $\varphi_0(x)$. Тоді ймовірність p_0 вибрати невірну гіпотезу H_1 , тобто відкинути H_0 і зробити помилку першого роду буде

$$p_0 = \int_{x(R_0/R_1)}^{\infty} \varphi_0(x) dx. \quad (3.25)$$

Нехай тепер насправді вірна альтернативна гіпотеза H_1 . Тоді ймовірність p_1 вибрати невірну гіпотезу H_0 , тобто відкинути H_1 і зробити помилку другого роду буде

$$p_1 = \int_{-\infty}^{x(R_0/R_1)} \varphi_1(x) dx. \quad (3.26)$$

Ймовірність протилежної події дорівнює $1 - p_1$, що є ймовірністю відкинути перевірювану гіпотезу, коли вона вірна, називається *потужністю статистичного критерію*.

З рис. 3.5 видно, що зменшення ймовірності p_0 відкинути нуль гіпотезу H_0 , коли вона вірна, призводить до одночасного збільшення ймовірності p_1 і, отже, до зменшення $1 - p_1$ і ймовірності відкинути гіпотезу H_0 , коли вона дійсно є помилковою. Звідси випливає, що величину $x(R_0/R_1)$ слід шукати з оптимального співвідношення ймовірностей p_0 і p_1 . Мінімізуючи деяким чином обрану лінійну комбінацію ймовірностей p_0 і p_1 , можна визначити оптимальне значення $x(R_0/R_1)$ і, отже, шуканий критерій може бути побудований.

Проте в задачах обробки результатів вимірювань застосування такого методу обмежено через те, що функція $\varphi_1(x)$ невідома, а також через неможливість у більшості випадків вибору коефіцієнтів лінійної комбінації. Тому в таких задачах вдаються до такого способу побудови критерію оцінки, який не вимагає знання величини коефіцієнтів і явного завдання функції $\varphi_1(x)$.

Критерії оцінки статистичних гіпотез у задачах обробки результатів вимірювань

Розглянемо критерій оцінки гіпотези H_0 на основі спостережуваного значення реалізації випадкової величини x_0 і постульованої функції $\varphi_0(x)$, неявно вважаючи, що існує альтернативна гіпотеза H_0 з відповідним розподілом ймовірностей, які описуються функцією $\varphi_1(x)$.

Шуканий критерій найпростіше отримати, якщо припустити, що що перевіряється H_0 вірна. Тобто розглянута випадкова величина дійсно розподілена за законом гіпотез, що задається функцією $\varphi_0(x)$. Нехай x_0 потрапило в область, розташовану поблизу правого або лівого "хвоста" функції $\varphi_0(x)$. Отже, ймовірність попадання випадкової величини в цю область, обчислена за допомогою функції $\varphi_0(x)$ досить близька до нуля. Це може бути наслідком одного з двох: або дійсно сталося малоімовірне подія, або гіпотеза H_0 не вірна.

Практика перевірки статистичних гіпотез у задачах обробки спостережень показує, що в цій ситуації доцільно вибрати друге пояснення, тобто визнати помилковість гіпотези H_0 . Навпаки, якщо значення випадкової змінної x_0 знаходиться в інтервалі досить віддаленому від хвостів функції $\varphi_0(x)$, то доцільно вважати, що гіпотеза H_0 може бути прийнята.

Назвемо інтервал значень випадкової величини, тобто відрізок осі абсцис, розташований у районі "хвоста" функції $\varphi_0(x)$, *критичною областю* даної функції. Введемо припущення про те, що попадання випадкової величини в критичну область свідчить про неприйнятність аналізованої гіпотези. Розміри критичної області характеризуються ймовірністю попадання в неї можливих значень випадкової величини. Ця ймовірність чисельно дорівнює величині заштрихованої області, чи їх сумі. Ймовірність попадання випадкової величини в критичну область отримала назву— *рівень значимості*.

Припустимо, що критична область розташована цілком у правій частині графіка функції $\varphi_0(x)$ і нехай рівень значимості дорівнює p (рис. 3.6.). Це означає, що площа обмежена кривою $\varphi_0(x)$ і ординатою крайньої лівої точки критичної області. Крапку x_p , що обмежує критичну область ліворуч, можна визначити величиною ймовірності $p = P(X > x_p)$, тобто рівнянням

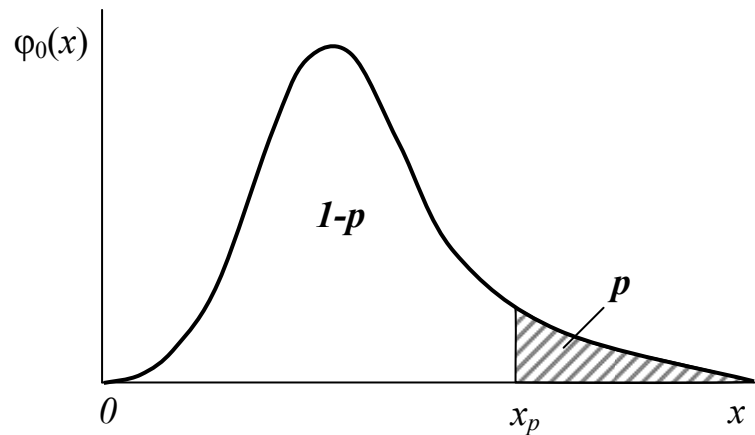


Рис. 3.6. Функція густини ймовірності розподілу випадкової величини. Критична область розташована у районі правого хвоста функції

$$\int_{x_p}^{\infty} \varphi_0(x) dx = p \quad (3.27)$$

Шуканий статистичний критерій оцінки гіпотези H_0 складається тоді в порівнянні x_0 з числовою величиною x_p .

Якщо

$$x_0 > x_p \quad (3.28)$$

для обраного рівня значущості p , то x_0 потрапляє в критичну область постульованої функції розподілу, отже гіпотеза H_0 повинна бути відкинута.

Якщо, навпаки,

$$x_0 < x_p \quad (3.29)$$

то x_0 лежить поза критичною областю і гіпотеза H_0 може бути прийнята.

Аналогічним чином можна розглянути критичну область у районі лівого хвоста функції (рис. 3.7.)

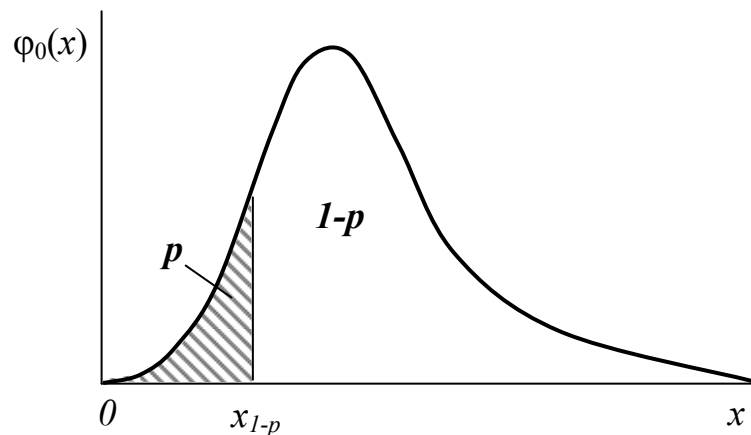


Рис. 3.7. Функція густини ймовірності розподілу випадкової величини. Критична область розташована поблизу лівого хвоста функції

Якщо критична область, в яку попадають значення x_0 випадкової величини, цілком розташована в правій (чи лівій) частини графіка $\phi_0(x)$, то *критерій називається одностороннім*. Односторонній критерій слід використовувати в тому випадку, коли заздалегідь є вагомі підстави для твердження про те, що незалежно від конкретного значення випадкової величини потрапляння її в протилежну область функцій або не можливе, або не має практичного значення. В іншому випадку критичну область необхідно розглядати з двох частин, а відповідні *критерії називаються двосторонніми* (рис. 3.8).

Вибір величини рівня значимості критерію

Порівнюючи формули (3.25) і (3.27), неважко переконатися, що $p=p_0$, тобто рівень значимості критерію за визначенням збігається з ймовірністю відкинути перевірювану гіпотезу H_0 , коли вона насправді вірна. Звідси, на перший погляд здається, що необхідно завжди прагнути ставити можливо більш низьке значення рівня значимості. Однак це не

так, оскільки зменшення ймовірності p_0 веде до одночасного зменшення ймовірності $1 - p_1$ відкинути гіпотезу H_0 , коли вона є помилковою.

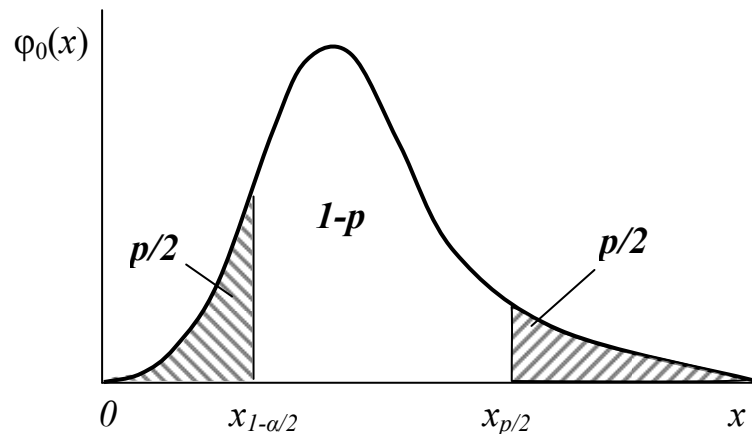


Рис. 3.8. Функція густини ймовірності розподілу випадкової величини. Критична область розташована поблизу лівого і правого хвоста функції

Отже, знижується чутливість критерію по відношенню до помилкової гіпотези.

Компроміс між ймовірностями відкинути вірну і невірну гіпотези забезпечується, якщо при виборі рівня значимості керуватися рекомендаціями, виробленими практикою застосування теорії перевірки статистичних гіпотез.

Прийняття гіпотези

1. Якщо перевірена гіпотеза приймається з 5%-вим або вищим значенням рівнем значимості, то гіпотезу, безумовно, слід визнати такою, що узгоджується з отриманими експериментальними даними.
2. Якщо перевірена гіпотеза може бути прийнята з рівнем значимості, меншим 5%-вого, але більше 1%-вого, то можна піти на ризик прийняття гіпотези, або взяти гіпотезу під сумнів. У такій ситуації слід визнати доцільним провести повторний експеримент

для отримання даних, на підставі яких можна було б зробити більш певні висновки.

3. Застосування критерію з більш низьким, ніж 1%-ним значенням рівня значимості, для прийняття гіпотези слід уникати.

Відкидання гіпотези

1. Якщо перевірювана гіпотеза відкидається з 1%-вим або більш низьким значенням рівнем значимості, то гіпотезу, безумовно, слід визнати як таку, що неузгоджується з отриманими експериментальними даними.
2. Якщо перевірена гіпотеза може бути відкинута з рівнем значимості, що знаходиться між 1%-вим і 5%-вим, то гіпотезу слід або також відкинути, або тільки поставити під сумнів. Однак у такій ситуації краще повторити експеримент і знову оцінити висунуту гіпотезу.
3. Застосування 5%-вого і більш високого значення рівня значимості не дає підстави для відкидання гіпотези.

3.6. Перевірка гіпотези однорідності результатів паралельних дослідів

Із цією задачею дослідники стикаються постійно, і вона полягає у виявленні та виключенні аномальних спостережень. Для виключення значень, що різко виділяються, рекомендується низка методів, які дають приблизно однакові результати. Наприклад, для перевірки *нуль-гіпотези* про те, що *екстремальне значення* $\max|x|$ вибірки належить до генеральної сукупності випадкової величини, обчислюється нормоване за $\tilde{\sigma}$ *максимальне відхилення*

$$\tau = \frac{\max_i |x_i - \bar{x}|}{\tilde{s}} \quad (3.30)$$

та порівнюється з табличними критичними значеннями (областями) максимального відносного відхилення $\tau(p, n)$ при рівнях значимості $p = 0,05$ і $p = 0,01$. Даний критерій використовується для вибірки невеликого об'єму ($n \leq 20$).

Щодо розглянутого критерію, якщо $\tau \leq \tau(0,05, n)$, то екстремальне спостереження $\max|x|$ не відсівається, а якщо виконується нерівність $\tau \geq \tau(0,01, n)$, то результат вимірювання відкидають. Після цього характеристики емпіричного розподілення повинні бути перераховані для скороченої вибірки й процедуру "відсіювання" грубих значень можна продовжити. Значення $\tau(\alpha, n)$ при різних n табульовані для $p = 0,01; 0,025; 0,05; 0,10$ (див. табл. 7 додатка).

Якщо виконується нерівність $\tau(p = 0,01, n) < \tau < \tau(p = 0,05, n)$ – нуль-гіпотезу про те, що екстремальне значення $\max|x|$ вибірки належить до генеральної сукупності випадкової величини можна прийняти, але за такої ситуації слід визнати доцільним проведення повторного експерименту.

Для вибірки великого об'єму критичне значення $\tau(p, n)$ можна виразити через критичні значення t -розподілу Стьюдента при числі степенів свободи $f = n - 2$ (див. табл. 4 додатка).

$$\tau(p, n) = \frac{t(p, f)\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-2 + [t(p, f)]^2}} \quad (3.31)$$

3.7. Перевірка належності вибірки до нормального розподілу

Під час розв'язування практичних завдань шляхом перевірки статистичних гіпотез застосовують розподілення випадкових величин (t ,

F , χ^2 , тощо), пов'язаний з нормальним розподіленням. Тому однією з початкових стадій статистичної обробки є виявлення можливості апроксимувати отримані результати експериментів нормальним розподіленням.

Для встановлення відповідності розподілення, яке спостерігається, нормальному розподіленню застосовують як *параметричні* (наприклад, χ^2 -, F -критерії), так і *непараметричні критерії*.

Гіпотеза, що перевіряється, може належати до параметрів передбаченого розподілення генеральної сукупності, таким як середньому m або дисперсії D_x нормального розподілення. Критерій для перевірки такої гіпотези про параметри називається *параметричним критерієм*. Однак не завжди можна сказати, яка функція розподілення має місце. Тому часто застосовуються методи перевірки, які дозволяють порівняти розподілення, не знаючи їх параметрів або форми. Критерії, засновані на порівнянні функцій розподілення, а не їх параметрів, називаються *непараметричні критерії*. Вони мають деякі переваги в порівнянні з параметричними: невелику кількість паралельних дослідів, менші вимоги до їх застосування, більший діапазон можливостей і більшу простоту реалізації.

Розглянемо перевірку належності вибірки до нормального розподілення за допомогою *непараметричного критерію Колмогорова-Смирнова*, використання якого вимагає невеликої кількості дискретних вимірювань ($3 \leq n \leq 20$). Завдяки цій умові критерій Колмогорова-Смирнова найбільш часто використовується для аналізу даних хімічного експерименту.

Для цього з упорядкованих за зростанням експериментальних даних обчислюють *абсолютну* (N_i) *частоту*, *частіть* (v_i) *та кумулятивну частіть* (w_{v_i}) появи результатів вимірів (x_i):

$$v_i = \frac{N_i}{n}, \quad (3.32)$$

де N_i – абсолютна частота появи значень виміряної величини у вибірці, n – загальне число вимірювань у вибірці.

$$w_{v_i} = \sum_i v_i \quad (3.33)$$

Далі нормують значення x_i за формулою

$$u_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{\tilde{\sigma}_x} \quad (3.34)$$

і знаходять значення гаусова інтеграла $\varphi(u_i)$, що відповідають u_i (див. табл. 8 додатка). Потім розраховують різницю між

$$|d| = w_{v_i} - \varphi(u_i) \quad (3.35)$$

і порівнюють максимальну з них $|d|_{max}$ з граничним значенням критерію Колмогорова-Смирнова $d(p, n)$ при рівні значимості $p = 0,05$. (див. табл. 9 додатка). Гіпотеза про нормальний розподіл відкидається, якщо $|d|_{max} > d(p, n)$. Критерій нормальності Колмогорова-Смирнова застосовується навіть при малому числі вимірювань ($n \geq 3$). Його можна застосовувати також для перевірки відповідності будь-якому розподіленню. Однак, слід мати на увазі, що функція розподілення, яка встановлена гіпотезою, повинна бути безперервною.

3.8. Порівняння двох стандартних відхилень

Нехай потрібно порівняти дві різні за величиною оцінки стандартних відхилень $\tilde{\sigma}_{x_1}$ і $\tilde{\sigma}_{x_2}$ зі ступенями свободи f_1 і f_2 . Потрібно вирішити, чи лежить різниця між $\tilde{\sigma}_{x_1}$ і $\tilde{\sigma}_{x_2}$ у межах можливих випадкових коливань, тобто чи можна обидва значення $\tilde{\sigma}_{x_1}$ і $\tilde{\sigma}_{x_2}$ розглядати як оцінку одного і того ж стандартного відхилення для генеральної сукупності з нормальним розподіленням.

Для порівняння двох стандартних відхилень використовується *F-критерій перевірки однорідності дисперсій*. Нуль-гіпотезою цієї задачі є твердження про те, що дисперсії, обчислені за даними двох вибірок, є оцінками однієї й тієї ж генеральної дисперсії. Тобто треба дати оцінку:

$$H_0 : D_{x_1} = D_{x_2} = D_x, \quad (3.36)$$

де D_{x_1}, D_{x_2}, D_x – генеральні дисперсії.

Конкуруюча гіпотеза полягає в зворотному твердженні, тобто вони є оцінками різних генеральних дисперсій.

Для оцінки гіпотези перевіряємо сумісність експериментального відношення дисперсій із функцією розподілу *Фішера*. Якщо вибіркові дисперсії \tilde{D}_{x_1} та \tilde{D}_{x_2} відповідають одній і тій ж генеральній дисперсії, відношення

$$F = \frac{\tilde{D}_{x_1}}{\tilde{D}_{x_2}} \quad (3.37)$$

підпорядковується розподілу Фішера.

Спочатку розраховується дисперсійне відношення $F = \frac{\tilde{D}_{x_1}}{\tilde{D}_{x_2}}$ за умови, що $\tilde{D}_{x_1} > \tilde{D}_{x_2}$. З таблиць знаходять критичні значення $F_p(p, f_1, f_2)$ при рівнях значущості $p = 0,05$ та $p = 0,01$ (див. табл. 6 додатка). Потім

порівнюється розраховане дисперсійне відношення й критичні значення $F(p, f_1, f_2)$. Якщо $F \leq F(p, f_1, f_2)$ при $p = 0,05$, то гіпотезу *однорідності дисперсій*, безумовно, слід визнати такою, що узгоджується з експериментальними даними. Якщо $F \geq F(p, f_1, f_2)$ при $p = 0,01$, то висунуту гіпотезу $H_0 : D_{x1} = D_{x2} = D_x$ слід відкинути. При цьому ймовірність зробити помилку першого роду (не прийняти нуль-гіпотезу, коли вона насправді правильна) буде меншою 1%. Якщо виконується нерівність $F(p = 0,01, f_1, f_2) < F < F(p = 0,05, f_1, f_2)$ – нуль-гіпотезу про те, що дисперсії, розраховані за даними двох вибірок, є оцінками однієї й тієї ж генеральної дисперсії, можна прийняти, але за такої ситуації слід визнати доцільним проведення повторного експерименту. Останнє правило слід застосовувати й для інших критеріїв оцінки гіпотез, але з метою спрощення викладання матеріалу далі воно не буде наводитися.

3.9. Порівняння декількох стандартних відхилень

При порівнянні декількох стандартних відхилень (більше двох) проводять перевірку однорідності дисперсій або за *критерієм Кохрена*, або за *критерієм Бартлетта*. Перший із них використовується при рівному числі ступенів свободи для всіх дисперсій. У цьому випадку розраховується відношення *максимальної дисперсії* ($\tilde{D}_{x(\max)}$) до суми усіх дисперсій

$$G = \frac{\tilde{D}_{x(\max)}}{\sum_{j=1}^m \tilde{D}_{x(j)}}, \quad (3.38)$$

де m – число дисперсій, що порівнюються.

Обчислені значення критерію Кохрена зіставляють із його критичними значеннями $G(p, f, m)$, визначеними при рівнях значимості

$p = 0,05$ і $p = 0,01$ та числі ступенів свободи $f = n - 1$ (див. табл. 10 додатка). Якщо $G \leq G(p, f, m)$ при $p = 0,05$, то гіпотезу *однорідності дисперсій*, безумовно, слід визнати такою, що узгоджується з експериментальними даними. Якщо $G \geq G(p, f, m)$ при $p = 0,01$, то висунуту гіпотезу $H_0 : D_{x_1} = D_{x_2} = \dots = D_{x(m)} = D_x$ слід відкинути.

За Бартлеттом (коли вибірки мають різний об'єм), для перевірки нуль-гіпотези $H_0 : D_{x_1} = D_{x_2} = \dots = D_{x(m)} = D_x$ використовується вираз, наближено розподілений як χ^2 :

$$\chi^2 = \frac{2,303}{c} \left(f_A \lg \tilde{D}_{x(A)} - \sum_{j=1}^m f_j \lg \tilde{D}_{x(j)} \right), \quad (3.39)$$

де $\tilde{D}_{x(A)}$ та f_A – відповідно *середньозважена дисперсія* та її число ступенів свободи; f_j – число ступенів свободи j -й оцінки; $\tilde{D}_{x(j)}$ – вибіркова дисперсія j -ї оцінки; c – коефіцієнт, що дорівнює

$$c = 1 + \frac{1}{3(m-1)} \left(\left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{f_j} \right) - \frac{1}{f_A} \right) \quad (3.40)$$

Середньозважена дисперсія та її число ступенів свободи розраховуються за формулами

$$\tilde{D}_{x(A)} = \frac{\sum_{j=1}^m f_j \cdot \tilde{D}_{x(j)}}{f_A} \quad (3.41)$$

$$f_A = \sum_{j=1}^m f_j = \left(\sum_{j=1}^m n_j \right) - m \quad (3.42)$$

Знайдена за формулою (3.39) величина χ^2 порівнюється із *критичними значеннями χ^2 -розподіленням $\chi^2(p, f)$* , визначеними при

рівнях значимості $p = 0,05$ і $p = 0,01$ та числі ступенів свободи $f = m - 1$ (див. табл. 5 додатка). Якщо має місце нерівність $\chi^2 \leq \chi^2(0,05, f)$, то нуль-гіпотеза про однорідність дисперсій приймається, у випадку $\chi^2 \geq \chi^2(0,01, f)$ гіпотезу, що перевіряється, треба відкинути. Це означає, що деякі з наявних оцінок $\tilde{D}_{x(j)}$ належать сукупностям, генеральні дисперсії яких $D_{x(j)}$ більші ніж D_x .

Якщо застосування критерію Фішера, Бартлетта або Кохрена показує, що дисперсії, які перевіряються, однорідні, то середньозважена дисперсія $\tilde{D}_{x(A)}$ з числом ступенів свободи f_A буде зведеною оцінкою відтворюваності вимірювань (див. (3.41) та (3.42)). Така дисперсія є більш надійною оцінкою генеральної дисперсії.

Для вибірок однакового об'єму розрахунок середньозваженої дисперсії та її числа ступенів свободи здійснюється із застосуванням формул:

$$\tilde{D}_{x(A)} = \frac{\sum_{j=1}^m \tilde{D}_{x(j)}}{m} \quad (3.43)$$

$$f_A = m(n - 1) \quad (3.44)$$

3.10. Перевірка гіпотези про рівність двох математичних сподівань

Нехай дано два середніх \bar{x}_1 та \bar{x}_2 , які отримані із двох незалежних одна від одної серій з n_1 і n_2 числом вимірювань. Середні дещо відрізняються. Необхідно перевірити, чи можна пояснити цю різницю тільки випадковою помилкою, тобто чи належать обидва середніх до

нормального розподілення сукупності з одним і тим самим математичним сподіванням m . У цьому випадку вміст нуль-гіпотези можна записати наступним чином $H_0: m_1=m_2=m$. Для порівняння двох середніх арифметичних можна скористатися *двобічним t -критерієм*. У випадку рівноточних вимірювань \bar{x}_1 та \bar{x}_2 (при відсутності значущої різниці \tilde{D}_{x_1} та \tilde{D}_{x_2}) розрахунки проводяться за наступною формулою:

$$t_{\bar{x}} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\tilde{D}_{x(A)}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}, \quad (3.45)$$

де $\tilde{D}_{x(A)}$ – середньозважена дисперсія, розрахована за (3.41) або (3.43).

Розрахована величина $t_{\bar{x}}$ порівнюється з критичними значеннями меж інтегрування t -розподілу Стьюдента $t(p, f_A)$, визначеними при числі ступенів свободи $f_A = f_1 + f_2$. Для двобічного критерію рівень значимості дорівнює сумі ймовірностей попадання випадкової величини в критичні області поблизу лівого та правого "хвостів" функції. Тому для знаходження меж інтегрування за таблицею 4 додатка критичні значення t -розподілу Стьюдента необхідно визначати при рівні значимості $p = 0,025$ та $p = 0,005$. Різниця між обома середніми вважається незначущою, якщо $t_{\bar{x}} \leq t(0,025, f_A)$. При $t_{\bar{x}} \geq t(0,005, f_A)$ відкидається нуль-гіпотеза про те, що обидва середні арифметичні є оцінками одного математичного сподівання.

У практиці хіміків-експериментаторів іноді з'являється необхідність перевірки однорідності двох середніх арифметичних за відсутності однорідності дисперсій. Розв'язання цієї задачі можна здійснити наближено. У відповідності з *наближенням Уелча* формула (3.45) для розрахунку $t_{\bar{x}}$ перетворюється на

$$t_{\bar{x}} \approx \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{(\tilde{D}_{x_1}/n_1) + (\tilde{D}_{x_2}/n_2)}} \quad (3.46)$$

Для визначення критичного значення $t(p, f)$ число ступенів свободи знаходиться за формулою:

$$f = [(\tilde{D}_{x_1}/n_1) + (\tilde{D}_{x_2}/n_2)]^2 \left[\frac{(\tilde{D}_{x_1}/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(\tilde{D}_{x_2}/n_2)^2}{n_2 - 1} \right] \quad (3.47)$$

При цьому величина f округлюється до цілого числа. Число ступенів свободи, обчислене за (3.47), завжди менше ніж у t -критерію при однорідних дисперсіях. Причому, воно зменшується тим сильніше, чим більша різниця між дисперсіями, і чим більш відрізняються n_1 та n_2 .

Є випадки, коли необхідно перевіряти різницю \bar{x} і детермінованого числа ξ (наприклад, будь-якої теоретичної величини). Тоді гіпотеза, що перевіряється, буде $H_0: m = \xi$, а формула (3.45) приймає вигляд

$$t_{\bar{x}, \xi} = \frac{|\bar{x} - \xi|}{\tilde{s}} \sqrt{n} \quad (3.48)$$

Перевірка проводиться порівнянням значення $t_{\bar{x}, \xi}$ з критичними значеннями t -розподілу Стьюдента $t(p, f)$ при числі ступенів свободи $f = n - 1$ та рівні значимості $p = 0,025$ або $0,005$.

3.11. Пошук грубих помилок

Іноді в серії вимірювань з'являються одна чи декілька точок, які різко відрізняються від всього масиву вимірювань. Для того, щоб відкинути точку, чи, навпаки, включити її у масив значень необхідно мати який-небудь критерій. Цей критерій носить назву «правило трьох

сигм» та стверджує, що точку, яка знаходиться за межами відрізка $\tilde{m}_x \pm 3\tilde{\sigma}_x$, необхідно вважати грубим відхиленням, тобто цю точку необхідно відкинути. Обґрунтуванням правила трьох сигм слугує нескладний розрахунок:

$$P(|x - \tilde{m}_x| < 3\tilde{\sigma}_x) = \Phi\left(\frac{3\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_x \sqrt{2}}\right) = \Phi(2,12).$$

За допомоги таблиці 1 додатка знаходимо, що $\Phi(2,12) = 0,997$. Отже, ймовірність виходу точки за межі відрізка $(\tilde{m}_x \pm 3\tilde{\sigma}_x)$ дорівнює $1,000 - 0,997 = 0,003$, тобто близька до нуля. Це свідчить про те, що подію - вихід точки за межі даного відрізка можна вважати практично неможливою.

Для наведеного вище прикладу $3\tilde{\sigma}_x = 0,798$, а максимальне значення $|x_i - \tilde{m}_x| = 0,4$, тобто знаходиться всередині відрізка $3\tilde{\sigma}_x$ і, значить, грубих помилок серед наведених даних немає.

При використанні правила трьох сигм виникає питання: чи потрібно точку, яку підозрюють як грубу помилку, включати у масив при розрахунках $(\tilde{m}_x, \tilde{D}_x, \tilde{\sigma}_x)$ та потім перевіряти її відповідність масиву за допомогою правила трьох сигм. Чи треба відразу виключити цю точку (j) з масиву даних i , якщо виявиться, що $|x_j - \tilde{m}_x| < 3\tilde{\sigma}_x$, то включити її у масив даних. На перший погляд обидва підходи («презумпція невинності» точки та «презумпція її винності») еквівалентні. Не будемо поспішати з висновками та розглянемо наступний приклад.

Приклад 3.3. Маємо $(n - 1)$ точку при вимірюванні. Нехай розсіяння цих точок таке мале (по відношенню до грубих відхилень), що

ним можна знехтувати та вважати, що всі вони $[(n - 1) \text{ точка}]$ влучили “одна в одну” та мають координату $x_i = a$. Одна точка випала з масиву даних та має координату $a + b$.

$$\bar{x} = \frac{(n-1)a + (a+b)}{n} = \frac{na - a + a + b}{n} = \frac{na + b}{n} = a + \frac{b}{n};$$

$$\overline{D_x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\left(a - a - \frac{b}{n}\right)^2 \cdot (n-1) + \left(a + b - a - \frac{b}{n}\right)^2 \cdot 1}{n-1} =$$

$$= \frac{\frac{b^2}{n^2}(n-1) + b^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}{n-1} = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1) + (n-1)^2}{n-1} = \frac{b^2}{n^2}(1 + n - 1) = \frac{b^2}{n};$$

$$3\overline{\sigma_x} = \frac{3b}{\sqrt{n}}$$

Відхилення випадкової величини від \bar{x} :

$$\Delta = (a + b) - \left(a + \frac{b}{n}\right) = b - \frac{b}{n} = b \frac{n-1}{n}.$$

Знайдемо відношення Δ до $3\overline{\sigma_x}$:

$$\frac{\Delta}{3\overline{\sigma_x}} = \frac{b \cdot \frac{n-1}{n}}{\frac{3b}{\sqrt{n}}} = \frac{n-1}{3\sqrt{n}}.$$

Неважко показати, що отримане співвідношення при $n < 10$ менше за одиницю за будь-яких значень b , тобто якщо застосувати правило трьох сигм у варіанті «включення» підозрюваної точки, то воно може не спрацювати навіть за дуже великих відхилень точки (j). Це відбувається тому, що у варіанті «включення» ця точка дає вирішальний вклад у суму $\left(x_i - \bar{x}\right)$ та за відносно невеликої кількості вимірів це призводить до різкого зростання \tilde{D}_x , а як результат і до «розтягування» інтервалу $3\tilde{\sigma}_x$ (тобто точка як би сама себе «вносить» у цей інтервал).

У наведеному вище прикладі 3.1 можна «підозрювати» відразу дві точки, у яких $x_i - \tilde{m}_x = 0,4$. Якщо їх виключити з масиву даних, то дисперсія та, відповідно, $\tilde{\sigma}_x$ зменшуються ($\tilde{D}_x = 0,046$; $\tilde{\sigma}_x = 0,214$), але і при такому підході $|x_j - \tilde{m}_x| < 3\tilde{\sigma}_x = 0,65$, тобто ці точки не є грубими відхиленнями і їх необхідно повернути до масиву даних.

При дуже малій кількості вимірювань ($n \cong 3 - 4$) використовувати правило трьох сигм не рекомендується. Дійсно, нехай із трьох точок дві (перша та друга) близькі одна до одної, а третя розташована далеко від них. Відкинув третю точку як грубу помилку, ми зміщуємо \tilde{m}_x у сторону перших двох точок. Можливо, однак, що друга точка випадково з'явилась біля першої, а повинна була б з'явитися біля третьої. В цьому випадку треба було б викинути першу точку. І перший варіант, і другий (викидання першої, чи третьої точки) неправильні, тому що значення \tilde{m}_x в кожному випадку залежить від положення тільки однієї (другої) точки.

Після перевірки відкидають грубе відхилення (якщо воно має місце) та будують довірчий інтервал.

3.12. Довірчий інтервал

У попередній главі було розглянуте питання про оцінку невідомого параметра a одним числом. Така оцінка називається «точковою». Проте у ряді завдань потрібно не тільки знайти для параметра a відповідне чисельне значення, але і оцінити його точність і надійність. Потрібно знати, до яких помилок може привести заміна параметра a його точковою оцінкою \tilde{a} і з якою впевненістю можна чекати, що ці помилки не вийдуть за визначені межі? Такого роду завдання особливо актуально при малому числі спостережень, коли точкова оцінка \tilde{a} у значній мірі випадкова і наближена заміна a на \tilde{a} може призвести до серйозних помилок. Щоб дати уявлення про точність і надійність оцінки \tilde{a} у математичній статистиці користуються так званими *довірчим інтервалом* та *довірчою ймовірністю*.

Якщо для параметра a одержана із досліду незміщена оцінка \tilde{a} , то треба оцінити можливу при цьому помилку. Візьмемо деяку достатньо велику ймовірність β (наприклад, $\beta=0,90$; $0,95$ чи $0,99$) таку, що подію із ймовірністю β можна вважати практично достовірною, і знайдемо таке значення ε , для якого:

$$P(|\tilde{a} - a| < \varepsilon) = \beta \quad (3.49)$$

Тоді діапазон практично можливих значень помилки, що виникає при заміні a на \tilde{a} , $\varepsilon \pm \varepsilon$. Великі за абсолютною величиною помилки з'являються тільки із малою ймовірністю ($p=1-\beta$). Перепишемо (3.49) у вигляді:

$$P(\tilde{a} - \varepsilon < a < \tilde{a} + \varepsilon) = \beta \quad (3.50)$$

Рівність (3.50) означає, що із ймовірністю β невідоме значення параметра a потрапляє в інтервал:

$$l_{\beta} = (\tilde{a} - \varepsilon; \tilde{a} + \varepsilon) \quad (3.51)$$

При цьому необхідно відзначити одну обставину. Раніше неодноразово розглядалася ймовірність попадання випадкової величини в заданий не випадковий інтервал. Тут справа йде про інше - величина « a » не випадкова, зате випадковий інтервал l_{β} та його положення на осі абсцис. Випадкова взагалі і довжина інтервалу 2ε , оскільки величина ε обчислюється, як правило, за експериментальними даними. Тому в даному випадку краще тлумачити величину β не як ймовірність «влучення» точки « a » в інтервал l_{β} , а як ймовірність того, що випадковий інтервал l_{β} накриє точку « a » (рис.3.9).

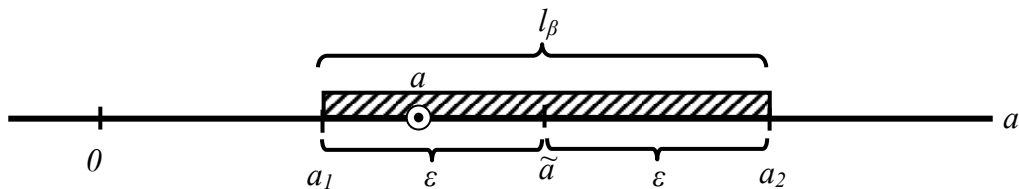


Рис. 3.9. Довірчий інтервал l_{β}

Ймовірність β прийнято називати *довірчою ймовірністю*, а інтервал l_{β} - *довірчим інтервалом*. Межі інтервалу l_{β} : $a_1 = \tilde{a} - \varepsilon$ та $a_2 = \tilde{a} + \varepsilon$ називаються *довірчими межами*.

Дамо ще одне тлумачення поняттю довірчого інтервалу: його можна розглядати як інтервал значень параметра a , сумісних із дослідними даними і таких, що не суперечать їм. Дійсно, якщо вважати

подію із ймовірністю $(p = 1 - \beta)$ практично неможливою, то ті значення параметра a , для яких $|\tilde{a} - a| > \varepsilon$, потрібно визнати такими, що суперечать дослідним даним, а ті, для яких $|\tilde{a} - a| < \varepsilon$ – сумісними з ними.

Будь-який довірчий інтервал знаходиться із умови, що виражає ймовірність виконання деяких нерівностей, в які входить оцінка \tilde{a} . Закон розподілення оцінки \tilde{a} у загальному випадку залежить від самих невідомих параметрів величини X . Проте іноді вдається перейти в нерівностях від випадкової величини \tilde{a} до іншої функції значень X_1, X_2, \dots, X_n , закон розподілення яких не залежить від невідомих параметрів, а залежить тільки від числа дослідів n і від виду закону розподілення величини X . Такого роду випадкові величини грають важливу роль в математичній статистиці; вони найдетальніше вивчені для випадку нормального розподілу величини X .

Наприклад, доведено, що при нормальному розподілі величини X випадкова величина $t = \frac{\bar{x} - m}{\tilde{\sigma}_{\bar{x}}}$ підкоряється так званому *закону розподілу Стьюдента* із $(n - 1)$ ступенями свободи (рівняння 3.13)

Покажемо, як розподілення (3.13) можна застосувати при побудові довірчого інтервалу для параметра $\bar{x}(\tilde{m}_x)$. Природно цей інтервал узяти симетричним відносно \bar{x} . Позначимо через ε_β половину довжини інтервалу. Величину ε_β потрібно вибрати так, щоб виконувалася умова (3.49), яка у даному випадку має вигляд:

$$P\left(|\bar{x} - m| < \varepsilon_\beta\right) = \beta \quad (3.52).$$

Перейдемо у лівій частині рівності (3.52) від випадкової величини \bar{x} до випадкової величини t , розподіленої за законом Стьюдента. Для цього поділимо обидві частини нерівності на величину

$\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$ і врахуємо, що $t = \frac{\bar{x} - m}{\tilde{\sigma}_{\bar{x}}}$:

$$P\left(\frac{|\bar{x} - m|}{\tilde{\sigma}_{\bar{x}}} < \frac{\varepsilon_{\beta}}{\tilde{\sigma}_{\bar{x}}}\right) = P(t < t_{\beta}) = \beta \quad (3.53)$$

Величина $t_{\beta} = \frac{\varepsilon_{\beta}}{\tilde{\sigma}_{\bar{x}}}$ розраховується із умови:

$$P(t < t_{\beta}) = \int_{-t_{\beta}}^{t_{\beta}} S_{n-1}(t) dt = \beta. \quad (3.54)$$

З формули (3.13) видно, що $S_{n-1}(t)$ - парна функція, тому співвідношення (3.54) дає:

$$2 \int_0^{t_{\beta}} S_{n-1}(t) dt = \beta \quad (3.55)$$

Рівності (3.54) та (3.55) визначають величину t_{β} через β . Якщо мати в

своєму розпорядженні таблицю значень інтеграла $\Phi(t) = 2 \int_0^t S_{n-1}(t) dt$, то

величину t_{β} можна знайти зворотною інтерполяцією. Проте зручніше

скласти наперед таблицю значень t_β , як функцію від β . Така таблиця дається в додатку (таблиця 4). У цій таблиці наведені значення t_β залежно від довірчої ймовірності β і числа ступенів свободи $(n-1)$.

Визначивши t_β за таблицею і, вважаючи, що:

$$\varepsilon_\beta = t_\beta \tilde{\sigma}_{\bar{x}} \quad \text{або} \quad \varepsilon_\beta = \frac{t_\beta \cdot \tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}} \quad (3.56),$$

можна знайти довірчий інтервал:

$$l_\beta = \left(\bar{x} - t_\beta \tilde{\sigma}_{\bar{x}}; \bar{x} + t_\beta \tilde{\sigma}_{\bar{x}} \right) \quad (3.57)$$

Довірчий інтервал слід завжди застосовувати замість досить невизначених термінів, таких як "помилка експерименту", "помилка значень аналізу", "границя помилки" і т.ін. Однак, довірчий інтервал не представляє собою конкретну помилку конкретного результату вимірювання. Можливість того, що конкретні значення мають більш високу помилку ніж ε , залишається з *рівнем значущості (з ризиком)* $p = 1 - \beta$. Тому границі довірчого інтервалу завжди слід доповнювати вказівкою *довірчої ймовірності (надійності)* β , з якою оцінювали цей інтервал.

Вибір довірчого інтервалу – предмет взаємної прийнятної угоди. Зазвичай у хімії для довірчого інтервалу використовують $\beta = 0,95$. Відповідальні рішення потребують більш високої надійності (наприклад, $\beta = 0,99$). У фармакології та близьких до неї галузях особливо важливо зберігати високу надійність: $\beta = 0,99$ або навіть $\beta = 0,999$. У фізиці часто задовольняються просто наведенням стандартного відхилення (тобто,

записують $\bar{x} \pm \tilde{\sigma}_x$). При цьому миряться з високим ризиком $p = 1 - 0,683 = 0,317$ появи великих відхилень, навіть при великому числі ступенів свободи ($f > 10$), при меншому числі вимірювань ризик помітно збільшується.

Слід зазначити, що при невеликій кількості вимірювань точність даних досить низька. Тому в таких випадках обмежуються вибором імовірності $\beta = 0,90$ або найбільше $\beta = 0,95$. При більш високих значеннях β довірчий інтервал занадто розтягується та втрачає практичну цінність.

Приклад 3.4. Проведено п'ять незалежних дослідів над випадковою величиною X із нормальним розподіленням. Результати дослідів наведені в таблиці 3.2:

Таблиця 3.2

n	1	2	3	4	5
t_β	-2,5	3,4	-2,0	1,0	2,1

Знайти оцінку $\tilde{m}_x(\bar{x})$ для математичного сподівання і побудувати для неї 90%-й довірчий інтервал (тобто інтервал, що відповідає довірчій ймовірності $\beta = 0,9$).

Розв'язок.

Маємо: $\tilde{m} = 0,4$; $\tilde{D} = 6,6$. $\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = 1,15$.

За таблицею 4 додатка для $(n-1) = 4$ та $\beta = 0,9$ знаходимо $t_\beta = 2,13$.

Звідки $\varepsilon_\beta = 2,45$. Довірчий інтервал $l_\beta (-2,05; 2,85)$.

3.13. Урахування довірчого інтервалу в записі остаточного результату вимірювання

Результатом обробки даних при довірчій імовірності, що задається, є два числа: середнє значення величини \bar{x} , що вимірюється, та його випадкова помилка (напівширина довірчого інтервалу) ε_β . Обидва числа є остаточним результатом багаторазового вимірювання і повинні бути сумісно записані в стандартній формі

$$x = \bar{x} \pm \varepsilon_\beta, \quad (3.58)$$

котра містить тільки достовірні, тобто надійно визначені, цифри цих чисел.

Помилкою було б уважати, що висока точність розрахунків при обробці даних може сприяти отриманню більш точних результатів вимірювання. Наприклад, комп'ютер може видати десяток ненульових цифр середнього та похибки, але чи всі вони будуть достовірні?

Обробка даних, якою б складною та трудомісткою вона не була, є вторинною у відношенні до природи об'єкта, що вивчається, та процесу вимірювання. В остаточних числових значеннях це слід урахувувати, що й роблять шляхом їх округлювання. Необхідність округлювання є простий наслідок невизначеності при оцінюванні остаточних результатів, що знаходяться за даними експерименту.

Обмежена кількість вимірювань вносить невизначеність, як у середнє значення, так і в похибку. У математичній статистиці показано, що відносна неточність оцінювання величини стандартного відхилення середнього $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$ складає приблизно $1/\sqrt{n-1}$. При $n \approx 10$ відносна похибка оцінювання $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$ може досягати 30%. Зрозуміло, що тоді втрачає сенс наводити в похибці зайві цифри, котрі можуть бути завідомо ненадійні. Однак при виконанні проміжних розрахунків корисно мати одну або дві

додаткові цифри. Округлювання великої кількості проміжних результатів, може призвести до значного зміщення остаточного результату.

Порядок виконання округлювання результатів безпосереднього вимірювання.

1. Виконується попередній запис остаточного результату вимірювання у вигляді (3.58) та виносяться за загальну дужку однакові порядки середнього та випадкової помилки, тобто множник вигляду 10^k , де k – ціле число.
2. Округлюється число, що відповідає випадковій помилці: до однієї значущої (ненульової) цифри ліворуч, якщо ця цифра більша 2, або до двох перших цифр у протилежному випадку.
3. Округлюється число, що відповідає середньому значенню: останніми праворуч залишаються цифри тих розрядів, котрі збереглися в похибці після її округлювання.
4. Остаточо записується $x = \bar{x} \pm \varepsilon$ з урахуванням виконаних округлювань. Загальний порядок та одиниці вимірювання величини наводяться за дужками.

Приклади округлювання та записи остаточних результатів вимірювань у стандартній формі наведені в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3

Запис остаточного результату експерименту

Попередній запис	Стандартна форма запису
$K_c = 0,003758 \pm 0,000031$	$K_c = (3,76 \pm 0,03) \cdot 10^{-3}$
$k = 46438 \pm 2155 \text{ л} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$	$k = (4,64 \pm 0,22) \cdot 10^4 \text{ л} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$
$E_a = 84349 \pm 5155 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1}$	$E_a = 84 \pm 5 \text{ кДж} \cdot \text{моль}^{-1}$
$A = (638,125 \pm 174,5) \cdot 10^5$	$A = (6,4 \pm 1,7) \cdot 10^7$

Існують й інші методики округлювання з урахуванням похибки вимірювання. Як правило, точність оцінки випадкової помилки є дуже невеликою. Тому абсолютна похибка округлюється до однієї значущої цифри. Однак, якщо ця цифра дорівнює одиниці, слід залишити дві значущі цифри. При остаточному записі результатів хімічного експерименту випадкову помилку округлюють до першої значущої цифри, навіть у тому випадку, коли вона дорівнює 1 або 2. За таким способом округлювання стандартні форми запису з таблиці 3.3 будуть мати вигляд: $A=(6\pm 2)\cdot 10^7$, $k=(4,6\pm 0,2)\cdot 10^4$ л·моль⁻¹·с⁻¹. Слід підкреслити, що в будь-якому випадку результати вимірювання та помилки повинні виражатися з однаковою точністю.

3.14. Оцінка систематичної похибки

Перед експериментаторами завжди стає питання: «Скільки треба вимірити значень?» Для цього спочатку треба порівняти значення випадкової помилки та систематичної похибки.



Рис. 3.10. Систематична похибка вимірювання відстані циркулем набагато перевищує відхилення руху електронів в атомі - випадок 1



Рис. 3.11. Випадкова помилка температури в кратері вулкана набагато перевищує можливості вимірювання температури термометром – випадок 2

Можна виділити три випадки:

- 1.- Систематична похибка значно перевищує випадкову;
2. - Випадкова помилка значно перевищує систематичну похибку;
3. - Випадкова помилка та систематична похибки сумірні.

Розглянемо ці випадки на прикладі вимірювання температури.

1. Якщо використовувати для вимірів грубий прилад, наприклад термометр, а систему ретельно термостатувати (ізолювати по можливості від дії зовнішніх факторів) за допомогою ультратермостата, то наш прилад (термометр) буде весь час показувати одне й те ж саме значення. В цьому випадку достатньо всього одного вимірювання.

2. Протилежна ситуація. Візьмемо чутливий термометр, наприклад термометр Бекмана, для вимірювання температури в системі з інтенсивним теплообміном (тобто система знаходиться під впливом різних випадкових зовнішніх чинників). Чутливий прилад реагує на найменші відхилення температури та оскільки ці відхилення хаотичні і достатньо інтенсивні, то маємо хаотично розсіяний масив точок, для якого визначити математичне сподівання практично неможливо. Таким чином, в цьому випадку підвищення кількості вимірів виявляється неефективним.

В дослідженнях треба реалізовувати третій випадок. Тобто, випадкова помилка та систематична похибки сумірні. Саме для цього випадку є сенс підвищувати число вимірювань (до розумних меж), щоб звужити довірчий інтервал та отримати більш якісні дані.

Величина ε - абсолютна похибка, завжди має позитивні значення. Для *безпосередніх* вимірів вона визначається чутливістю даного методу, приладу тощо. Наприклад, якщо проводиться титрування (волюметричний метод аналізу в аналітичній хімії), то точка переходу визначається із точністю до 1-2 крапель, тобто $\varepsilon_V \approx 0,05$ мл. Для настінного термометра, який вимірює температуру навколишнього повітря звичайно $\varepsilon_T \approx 1^\circ$; у термометра для вимірювання температури людського тіла $\varepsilon_T \approx 0,1^\circ$; а термометр Бекмана може вимірювати температуру із точністю до $\varepsilon_T \approx 0,005^\circ$. Аналогічно визначається похибка у всіх безпосередніх вимірюваннях.

Крім абсолютної похибки часто використовують відносну похибку δ :

$$\delta_a = \frac{\varepsilon_a}{|a|} \quad (3.59)$$

де $|a|$ - абсолютне (за модулем) значення вимірюваної величини.

δ_a - також завжди позитивна величина.

Наприклад, якщо для титрування використовується колба ємністю $V = 50$ мл, то $\delta_V = \frac{\varepsilon_V}{|V|} = \frac{0,05}{50} = 0,001(0,1\%)$.

Існує просте правило для оцінки величини δ , а саме, якщо S - це число значущих (достовірних) цифр у величині, що визначається, то $\delta \approx 10^{-S}$. Наприклад, у прикладі, що було наведено, $V = 50,00 \pm 0,05$, четверта цифра вже ненадійна, значить, $S = 3$, а $\delta_V \approx 10^{-3} = 0,001$ у повній відповідності із отриманим вище результатом.

Очевидно, що при $S = 0$ $\delta = 1(100\%)$, тобто похибка дорівнює самій величині, що вимірювалась, та не можна довіряти жодній цифрі.

На практиці часто треба мати справу із *опосередкованими* вимірюваннями, тобто необхідно оцінити похибку (ε_u) деякої величини u , яка зв'язана функціональною залежністю: $u = f(x)$ з безпосередньо вимірюваною величиною x . При цьому вважається, що похибка аргументу (ε_x) вже відома.

Запишемо $x = a + \varepsilon_x$, де a - точне значення величини x , та будемо вважати, що $\varepsilon_x \ll a$ (це еквівалентно припущенню, що $\delta \ll 1$).

Розкладемо величину u у ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} u &= f(x) = f(a + \varepsilon_x) = \\ &= f(a) + \frac{f'(a)\varepsilon_x}{1!} + \frac{f''(a)\varepsilon_x^2}{2!} + \dots \end{aligned} \quad (3.60)$$

Оскільки ε_x за умовою мала величина, то при розкладі у ряд Тейлора можна знехтувати доданками із членами $\varepsilon_x^2, \varepsilon_x^3$ тощо.

Тоді:

$$\varepsilon_u = f(a + \varepsilon_x) - f(a) = f'(x)\varepsilon_x \quad (3.61)$$

Проілюструємо формулу (3.61) наступними прикладами.

Приклад 3.4. Знайти похибку логарифмічної функції.

Розв'язок.

Нехай $u = \ln x$, $f'(u) = \frac{1}{x}$ і відповідно до (3.61) можна записати:

$$\varepsilon_u = \frac{1}{x} \cdot \varepsilon_x = \delta_x.$$

Таким чином, для логарифмічної функції абсолютна похибка функції дорівнює відносній похибці аргументу.

Приклад 3.5. Знайти відносну похибку (δ_k) для визначення константи швидкості хімічної реакції.

Розв'язок. За рівнянням Арреніуса константа швидкості залежить від температури (величина, що вимірюється) таким чином: $k = k_0 e^{-E/RT}$

Тоді:

$$\delta k = \frac{\varepsilon_k}{|k|} = \frac{f'(k)\varepsilon_T}{|k|} = \frac{k_0 e^{-E/RT} \left(-\frac{E}{R} \right) \left(-\frac{1}{T^2} \right) \varepsilon_T}{k_0 e^{-E/RT}} =$$

$$= \frac{E}{RT^2} \varepsilon_T = \frac{E}{RT} \cdot \frac{\varepsilon_T}{T} = \frac{E}{RT} \delta_T$$

Проілюструємо отриманий результат чисельними прикладами.

А. Для високотемпературних вимірів $T \approx 700\text{К}$; $E=170$ кДж/моль;
 $R= 8,31$ Дж/моль К, $\varepsilon_T = 2$ К.

$$\delta_T = \frac{2}{700} \cong 0,003 \cong 0,3\%$$

$$\delta_k = \frac{170000}{8,31 \cdot 700} \cdot 0,3\% = 8,8\%$$

Незважаючи на відносно невелику похибку у вимірі температури ($\delta_T < 1\%$), похибка у визначенні константи швидкості стає досить великою (всього одна **значуща** цифра!)

Б. При температурах, близьких до кімнатних ($T \approx 300\text{К}$), дослідження звичайно проводять в ультратермостатах, які дозволяють більш точно фіксувати температуру - $\varepsilon_T = 0,02$ К. Енергія активації для таких реакцій (у розчинах) звичайно нижча, ніж для високотемпературних процесів – $E = 80$ кДж/моль.

$$\delta_T = \frac{0,02}{300} \cong 0,00007 \cong 0,007\%$$

$$\delta_k = \frac{80000}{8,31 \cdot 300} \cdot 0,007\% = 0,22\%$$

В цьому випадку з'являється можливість розрахувати константу швидкості хімічної реакції вже із точністю до трьох цифр.

Розглянемо як визначити похибку для функції із декількома змінними. Для ілюстрації обмежимося випадком двох незалежних

аргументів, тобто $u = f(x, y)$. Замість повної похідної, що використовувалася у рівнянні (3.61), тепер треба використовувати частинні похідні, тобто:

$$\varepsilon_u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_y \varepsilon_x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_x \varepsilon_y. \quad (3.62)$$

Неважко побачити, що рівняння (3.62) можна узагальнити для будь-якого числа змінних.

Використовуючи рівняння (3.62) для визначення похибки добутку двох величин знаходимо:

$$\begin{aligned} u &= x \cdot y; \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_y &= y; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_x = x; \\ \varepsilon_u &= y \cdot \varepsilon_x + x \cdot \varepsilon_y; \\ \delta_u = \frac{\varepsilon_u}{u} &= \frac{y\varepsilon_x + x\varepsilon_y}{xy} = \frac{\varepsilon_x}{x} + \frac{\varepsilon_y}{y} = \delta_x + \delta_y. \\ \delta_u &= \sum \delta_i. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Аналогічну формулу отримуємо і для частки.

Як що всі множники однакові, то:

$$\delta_u = n\delta_i$$

Тобто для ступеневої залежності $u = x^n$

$$\delta_u = n\delta_x \quad (3.64)$$

Цей результат можна отримати і за допомогою формули (3.61), тобто:

$$\varepsilon_u = (x^n)' \varepsilon_x = n \cdot x^{n-1} \cdot \varepsilon_x;$$

$$\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{u} = \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot \varepsilon_x}{x^n} = n \frac{\varepsilon_x}{x} = n \cdot \delta_x.$$

Приклад 3.6. Знайти абсолютну похибку у визначенні прискорення вільного падіння (g), якщо відомо, що g може бути розраховане із формули: $g = 4\pi^2 \frac{l}{\tau^2}$, де l - довжина маятника; τ - період його коливань.

Розв'язок.

$l=50,02$ см;	$\varepsilon_l=0,01$ см;	$\delta_l=0,02$ %;
$\tau =0,7098$ сек;	$\varepsilon_\tau=0,0001$ сек;	$\delta_\tau=0,0143$ %;
$\pi=3,1416$;	$\varepsilon_\pi=0,00005$;	$\delta_\pi=0,0017$ %;

$$\delta_g = 2\delta_\pi + \delta_l + 2\delta_\tau = 0,052 \text{ %};$$

$$\varepsilon_g = \delta_g \cdot g = 0,00052 \cdot 981,07 = 0,51 \text{ см/сек}^2$$

$$g = 981 \pm 0,51 \text{ см/с}^2.$$

Для суми двох величин $u = x + y$ з (3.62) маємо:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x = 1;$$

$$\varepsilon_u = \varepsilon_x + \varepsilon_y; \quad (3.65)$$

$$\varepsilon_u = \sum \varepsilon_i \quad (3.66)$$

Відносна похибка суми при цьому менша суми відносних похибок аргументу:

$$\begin{aligned} \delta_u &= \frac{\varepsilon_u}{u} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{x + y} = \frac{\varepsilon_x}{x + y} + \frac{\varepsilon_y}{x + y} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon_x}{x} + \frac{\varepsilon_y}{y} = \delta_x + \delta_y \end{aligned}$$

Для різниці $u = x - y$ абсолютна похибка знаходиться також як і для суми за формулою (3.65), тобто додаються абсолютні похибки аргументів.

$$\varepsilon_u = \varepsilon_x + \varepsilon_y;$$

Але

$$\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{u} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{x - y} = \frac{\varepsilon_x}{x - y} + \frac{\varepsilon_y}{x - y}. \quad (3.67)$$

Формула (3.67) показує, що при $x \rightarrow y$ $\delta_u \rightarrow \infty$. Таким чином, при визначенні різниці двох близьких величин різко підвищується похибка, і тому необхідно підвищувати кількість значущих цифр в x , що зменшується, та в y , що віднімається. Іншими словами різко підвищуються вимоги до точності обох аргументів x та y .

Якщо цю ситуацію описати образно (різниця двох великих близьких за значенням величин), то можна порівняти це із визначенням ваги капітана пароплава шляхом послідовного зважування пароплава спочатку із капітаном, а потім без нього.

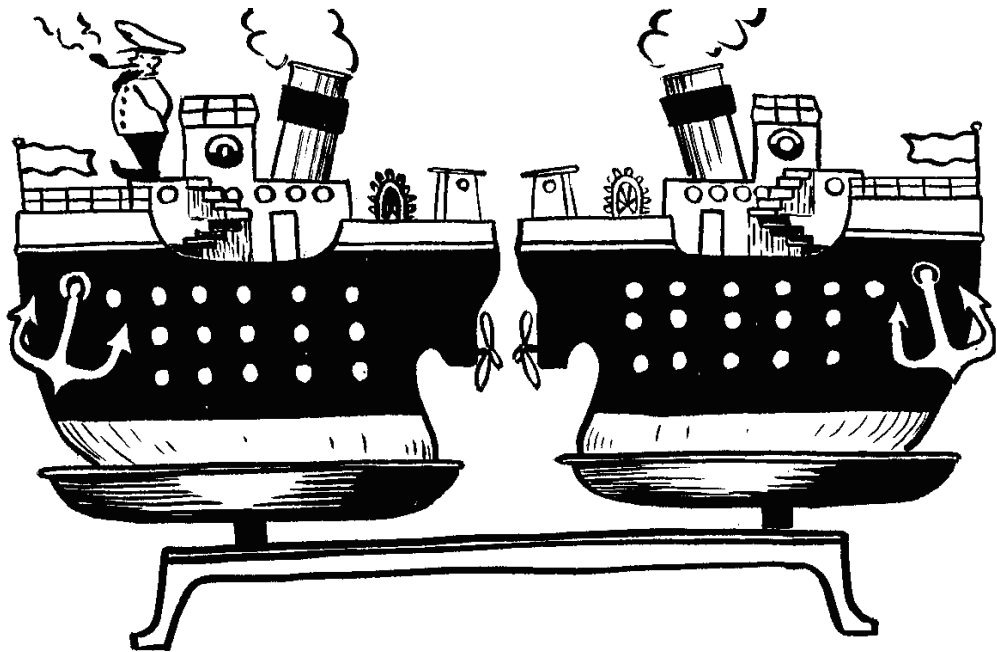


Рис. 3.12. Зважування капітана

У ряді випадків можна використати наступний прийом. Якщо x_1 та x_2 - близькі за значеннями аргументи, то їх різниця $\Delta x = x_2 - x_1$ повинна бути малою у порівнянні із x_1 та x_2 . Тоді для різниці близьких значень функції: $f(x_1)$ та $f(x_2)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
 f(x_2) - f(x_1) &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) = \\
 &= f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x_1)}{2!} \Delta x^2 + \dots - f(x_1) \approx \\
 &\approx f'(x_1) \Delta x.
 \end{aligned}
 \tag{3.68}$$

Цю формулу можна використовувати для обрахунків похибки функції, якщо значення аргументів близькі за значеннями.

Проілюструємо можливість використання співвідношення (3.68) на конкретному прикладі.

Приклад 3.8. Знайти об'єм газгольдера (рис. 3.13), який складається із двох концентричних сфер із діаметрами $d(1)_{\text{зовн}} = 2,010$ м та $d(2)_{\text{вн.}} = 2,008$ м, де $d(1)_{\text{зовн}}$ – зовнішній радіус та $d(2)_{\text{вн.}}$ – внутрішній радіус.

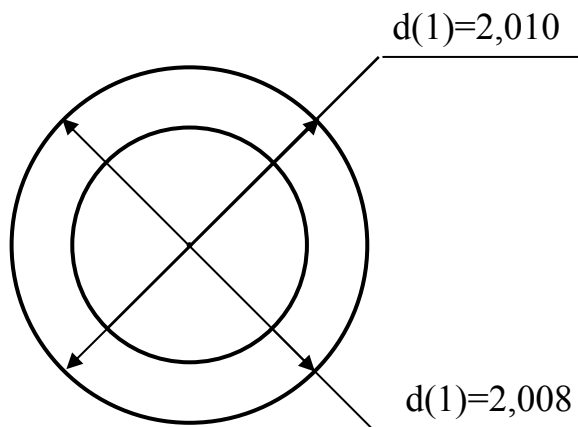


Рис.3.2. Схема газгольдера

Розв'язок. Якщо провести розрахунки без використання формули (3.68), то отримуємо:

$$V_{\text{зовн.}} = (\pi/6) (d_{\text{зовн.}})^3 = (3,142/6) \cdot 2,010^3 = 4,25 \text{ м}^3;$$

$$V_{\text{вн}} = (\pi/6) (d_{\text{вн}})^3 = (3,142/6) \cdot 2,008^3 = 4,24 \text{ м}^3;$$

$$\Delta V = V_{\text{зовн.}} - V_{\text{вн}} = 4,25 - 4,24 = 0,01 \text{ м}^3.$$

Отримані розрахунки показують, що якщо обмежитися для $V_{\text{зовн.}}$ та $V_{\text{вн}}$ трьома значущими цифрами, то у відповіді отримуємо грубу помилку – всього одну значущу цифру.

Якщо використати формулу (3.68), то маємо:

$$f'(d)\Delta d = \left(\frac{\pi d^3}{6} \right)' \Delta d = \frac{3\pi d^2}{6} \Delta d = \frac{\pi d^2}{2} \Delta d;$$

$$\begin{aligned} f'(d)\Delta d &= \frac{3,14159 \cdot (2,008)^2}{2} (2,010 - 2,008) = \\ &= \frac{3,14159 \cdot 4,0321}{2} \cdot 0,002 = 12,6672 \cdot 0,001 = 0,013 \end{aligned}$$

Тут отримано точність у розрахунках до двох значущих цифр.

3.15. Нерівноточні вимірювання

В деяких випадках ті чи інші результати вимірювань можуть бути більш надійними, ніж інші. Наприклад, вимірювання проводились на обладнанні різного класу. Такі результати є *нерівноточними*. Тут кожному вимірюванню відповідає своя *статистична вага*:

$$g_1 \neq g_2 \neq g_3 \neq \dots g_n.$$

В цьому випадку оцінкою математичного сподівання є вже не середньоарифметичне, а *середньозважене значення* випадкової величини:

$$\tilde{m}_x = m_x^* = \frac{\sum_i x_i p_i^*}{\sum_i p_i^*} = \frac{\sum_i x_i \frac{g_i}{n}}{\sum_i \frac{g_i}{n}} = \frac{\sum_i x_i g_i}{\sum_i g_i}, \quad (3.69)$$

де p_i^* - статистична частота.

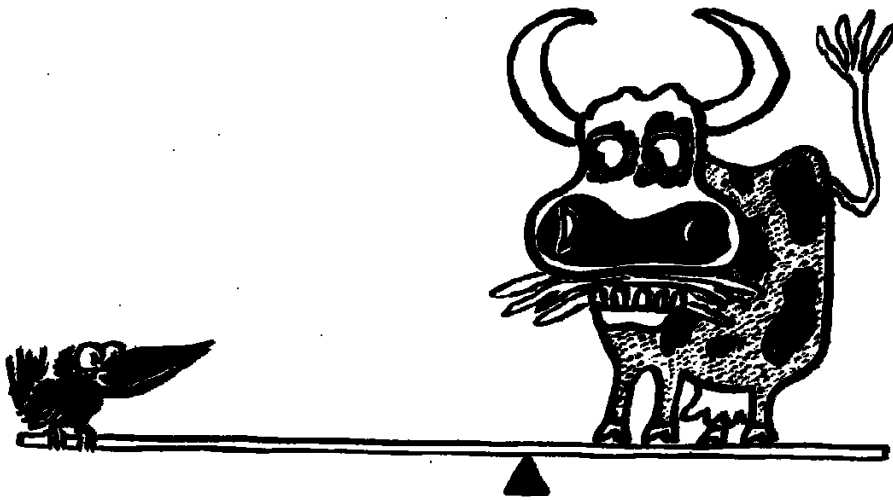


Рис. 3.14. Пошук середньозваженого значення

При $g_1 = g_2 = g_3 = \dots = g_n = const$ з (3.69) отримуємо:

$$\tilde{m}_x = m_x^* = \frac{\sum_i x_i const}{\sum_i const} = \frac{const \sum_i x_i}{const \cdot n} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \bar{x} \quad (3.70)$$

Таким чином, середньоарифметичне є частковим випадком середньозваженого при рівних вагах, тобто для рівноточних вимірювань.

Дисперсія для нерівноточних вимірювань визначається за формулою, аналогічною з (3.9):

$$D_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 g_i}{n-1} \quad (3.71)$$

Відзначимо, що у випадку рівноточних вимірювань $D[x_1] = D[x_2] = \dots = D[x_i] = \dots = D[x_n]$. Для нерівноточних вимірювань нульова дисперсія у рівнянні (3.71) має зміст дисперсії на одиницю ваги. Покажемо це. Припустимо, що вимірювання проводять серіями, а всередині кожного з них результати рівноточні:

$$\begin{array}{ccc} \text{I серія} & \text{II серія} & \text{III серія} \\ \begin{array}{c} ' \quad ' \quad ' \quad ' \\ x_1, x_2, x_3 \dots x_k \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{g_1=k} \end{array} & \begin{array}{c} " \quad " \quad " \quad " \\ x_1, x_2, x_3 \dots x_l \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{g_2=l} \end{array} & \begin{array}{c} " \quad " \quad " \quad " \\ x_1, x_2, x_3 \dots x_m \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{g_3=m} \end{array} \end{array}$$

Всього n серій.

Всередині кожної серії легко визначається середнє арифметичне:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^k x_i'}{k} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i'}{g_1}; & \bar{x}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^l x_i''}{l} = \frac{\sum_{i=1}^l x_i''}{g_2}; \\ \bar{x}_3 &= \frac{\sum_{i=1}^m x_i'''}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i'''}{g_3}; \dots \end{aligned}$$

Коли є проміжні середні (\bar{x}_i), то можна знайти середнє для всіх серій ($\tilde{m}_{\bar{x}}$). Зрозуміло, що величини (\bar{x}_i) треба обробляти як нерівноточні та шукати загальне середнє за формулою (3.69):

$$\tilde{m}_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i g_i}{\sum_{i=1}^n g_i},$$

де n - кількість серій.

Ясно, що проміжне середнє (\bar{x}_i) тим точніше, чим із більшої кількості доданків воно отримано, тобто чим більше число вимірювань у кожній групі. Тому доцільно прийняти статистичну вагу для (\bar{x}_i) рівною (чи пропорційною) числу вимірювань всередині групи.

Оскільки всередині групи вимірювання рівноточні та при k вимірюваннях $g_i = k$ (у відповідності до вищесказаного), то, відповідно до рівності (3.3), можна записати:

$$\tilde{D}_{x_i} = \frac{\tilde{D}_{x_i}}{g_i} = \frac{\tilde{D}_o}{g_i} \quad (3.72)$$

Із співвідношення (3.72) видно, що $\tilde{D}_i = \tilde{D}_o$ при $g_i = 1$, тобто \tilde{D}_o виявляється дисперсією одиниці ваги.

Тепер визначимо дисперсію середньо зваженого значення $\tilde{m}_{\bar{x}}$, яке необхідно знати для визначення $\tilde{\sigma}_{\tilde{m}_{\bar{x}}}$ та побудові довірчого інтервалу. Використаємо для цього властивості дисперсії (2.32) – (2.34):

$$\begin{aligned}
D[\tilde{m}_{\bar{x}}] &= D\left[\frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i g_i}{\sum_{i=1}^n g_i}\right] = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n g_i\right)^2} D\left[\sum_{i=1}^n \bar{x}_i g_i\right] = \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n D[\bar{x}_i g_i]}{\left(\sum_{i=1}^n g_i\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i^2 D[\bar{x}_i]}{\left(\sum_{i=1}^n g_i\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i^2 \frac{\tilde{D}_o}{g_i}}{\left(\sum_{i=1}^n g_i\right)^2} = \\
&= \frac{\tilde{D}_o \left(\sum_{i=1}^n g_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^n g_i\right)^2} = \frac{\tilde{D}_o}{\sum_{i=1}^n g_i}
\end{aligned}$$

Тобто:

$$D[\tilde{m}_{\bar{x}}] = \frac{\tilde{D}_o}{\sum_{i=1}^n g_i} \quad (3.73)$$

Формула (3.73) аналогічна формулі (3.3) для рівноточних вимірювань. Для середньоквадратичної помилки середньозваженого отримуємо з (3.73) формулу, що аналогічна (3.11):

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{m}_{\bar{x}}} = \frac{\tilde{\sigma}_o}{\sqrt{\sum_{i=1}^n g_i}} \quad (3.74)$$

Розглянемо приклад обробки нерівноточних вимірювань.

Приклад 3.9. Знайти середньозважене значення ($\tilde{m}_{\bar{x}}$) та його середньоквадратичну похибку ($\tilde{\sigma}_{\tilde{m}_{\bar{x}}}$) для серії нерівноточних вимірювань.

Таблиця 3.4.

Обробка нерівноточних вимірювань.

n	x_i	g_i	$x_i \cdot g_i$	$x_i - \tilde{m}_{\bar{x}}$	$(x_i - \tilde{m}_{\bar{x}})^2 g_i$
1	43	5	215	0,5	1,25
2	39	1	39	-3,5	12,25
3	44	1	44	1,5	2,25
4	42	1	42	-0,5	0,25
5	45	1	45	2,5	6,25
6	40	1	40	-2,5	6,25
Σ		10	425		28,5

$$\sum_{i=1}^n x_i g_i = 425; \quad \tilde{m}_{\bar{x}} = \frac{425}{10} = 42,5;$$

$$\tilde{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{28,5}{6-1}} = 2,4; \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{m}_{\bar{x}}} = \frac{2,4}{\sqrt{10}} = 0,74.$$

Корисно співставити нерівноточні вимірювання з рівноточними.

Спочатку замість одного значення $x_i = 43$ з $g_i = 5$ візьмемо п'ять однакових значень $x_i = 43$ з $g_i = 1$. Тоді отримуємо серію рівноточних вимірювань, наведених у таблиці 3.5.

Таблиця 3.5.

Співставлення нерівноточних вимірювань з рівноточними (варіант I).

n	x_i	$x_i - \tilde{m}_x$	$(x_i - \tilde{m}_x)^2 g_i$
1	43	0,5	0,25
2	43	0,5	0,25
3	43	0,5	0,25
4	43	0,5	0,25
5	43	0,5	0,25
6	39	-3,5	12,25
7	44	1,5	2,25
8	42	-0,5	0,25
9	45	2,5	6,25
10	40	-2,5	6,25
Σ	425	0	28,5

$$\tilde{m}_x = \bar{x} = \frac{425}{10} = 42,5; \quad \tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{28,5}{10-1}} = 1,78; \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x} = \frac{1,78}{\sqrt{10}} = 0,56.$$

Отримане значення $\tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x} = 0,56$ виявилось значно меншим за наведене вище $\tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x} = 0,74$ для нерівноточних вимірювань. Таким чином, заміна одного значення із $g_i = 5$ на п'ять рівних x_i з $g_i = 1$ (варіант I) є помилковою. Насправді одне значення із $g_i = 5$ еквівалентно п'яти різним значенням, середньоарифметичне значення яких повинно дорівнювати даному числу (в нашому прикладі 43). Розглянемо тепер варіант II. Замінімо одне значення 43 на п'ять: 40; 43; 44; 45; 43, для яких $\bar{x} = \frac{40 + 43 + 44 + 45 + 43}{5} = 43$. Отримані дані наведені у таблиці 3.6.

Таблиця 3.6.

Співставлення нерівноточних вимірювань з рівноточними (варіант II).

n	x_i	$x_i - \tilde{m}_{\bar{x}}$	$(x_i - \tilde{m}_{\bar{x}})^2 g_i$
1	40	-2,5	6,25
2	43	0,5	0,25
3	45	2,5	6,25
4	44	1,5	2,25
5	43	0,5	0,25
6	39	-3,5	12,25
7	44	1,5	2,25
8	42	-0,5	0,25
9	45	2,5	6,25
10	40	-2,5	6,25
Σ	425	0	42,5

$$\bar{m}_x = \bar{x} = \frac{425}{10} = 42,5; \quad \tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{42,5}{10-1}} = 2,2; \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x} = \frac{2,2}{\sqrt{10}} = 0,70.$$

У варіанті II $\tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x} = 0,70$ наближається до значення $\tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x} = 0,74$ для нерівноточних вимірювань, отже наше припущення виправдалося.

У випадку нерівноточних вимірювань, як і у випадку рівноточних, іноді зручно обраховувати дисперсію, зміщуючи початок координат у точку, яка наближена до $\tilde{m}_{\bar{x}}$. Виведемо відповідну формулу для \tilde{D}_0 , використовуючи формулу (3.71):

$$\begin{aligned} \bar{D}_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{m}_x)^2 g_i}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i (x_i^2 - 2\tilde{m}_x x_i - \tilde{m}_x^2)}{n-1} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n g_i x_i^2 - 2\tilde{m}_x \sum_{i=1}^n x_i g_i + \tilde{m}_x^2 \sum_{i=1}^n g_i}{n-1}; \end{aligned}$$

Вважаючи, що $\tilde{m}_x = \frac{\sum_{i=1}^n g_i x_i}{\sum_{i=1}^n g_i}$, отримаємо $\sum_{i=1}^n g_i x_i = \tilde{m}_x \sum_{i=1}^n g_i$. Тоді

$$\tilde{D}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n g_i x_i^2 - 2\tilde{m}_x \cdot \tilde{m}_x \sum_{i=1}^n g_i + \tilde{m}_x^2 \sum_{i=1}^n g_i}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i x_i^2 - \tilde{m}_x^2 \sum_{i=1}^n g_i}{n-1}. \quad (3.75)$$

Розрахунок \tilde{D}_0 за формулою (3.75) схожий із розрахунком \tilde{D}_x для рівноточних вимірювань через статистичний аналог другого початкового моменту $(\alpha_2^*[x])$.

Розглянемо приклад такого розрахунку.

Приклад 3.10. Знайти $(\tilde{m}_{\bar{x}})$ та $(\tilde{\sigma}_{\tilde{m}_{\bar{x}}})$ для масиву нерівноточних значень.

Таблиця 3.7.

Обробка нерівноточних вимірювань зі зміщенням початку координат.

n	g_i	x_i	$x'_i = x_i - 240,0$	$g_i x_i$	$g_i (x'_i)^2$
1	1	236,4	-3,6	-3,6	12,96
2	3	241,6	1,6	4,8	7,68
3	1	242,0	2,0	2,0	4,00
4	5	240,7	0,7	3,5	2,45
5	3	237,4	-2,6	-7,8	20,28
6	5	239,5	-0,5	-2,5	1,25
7	3	243,8	3,8	11,4	43,32
8	5	242,5	2,5	12,5	31,25
Σ	26			23,3	123,19

$$\tilde{m}'_x = \frac{23,3}{26} = 0,9; \quad \tilde{m}_x = 0,9 + 240,0 = 240,9;$$

$$\tilde{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{123,19 - 0,9^2 \cdot 26}{8-1}} = 3,82; \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x} = \frac{3,82}{\sqrt{26}} = 0,75.$$

Побудова довірчого інтервалу для нерівноточних вимірювань аналогічно рівноточним, тобто: $\tilde{m}_x \pm t_\beta \tilde{\sigma}_{\tilde{m}_x}$, де параметр t_β визначається числом вимірювань (n) та довірчою імовірністю (β) (таблиця 4 додатока).

Розрахунки показують, що обробка нерівноточних вимірювань відносно нескладна процедура, якщо відомі статистичні ваги (g_i). Визначення g_i може бути проведено різними способами.

Якщо проводити усереднення проміжних середніх значень, як показано вище, то статистичну вагу можна прирівняти до числа вимірювань у групі (чи взяти пропорційне до числа вимірювань число).

Формула (3.72) дає ще один спосіб оцінювання статистичної ваги. Якщо відомі значення дисперсії, то ваги беруться обернено пропорційними відповідних дисперсій:

$$\begin{aligned} g_1 : g_2 : g_3 : \dots : g_i : \dots : g_n &= \frac{1}{\tilde{D}_1} : \frac{1}{\tilde{D}_2} : \frac{1}{\tilde{D}_3} : \dots : \frac{1}{\tilde{D}_i} : \dots : \frac{1}{\tilde{D}_n} = \\ &= \frac{1}{\tilde{\sigma}_1^2} : \frac{1}{\tilde{\sigma}_2^2} : \frac{1}{\tilde{\sigma}_3^2} : \dots : \frac{1}{\tilde{\sigma}_i^2} : \dots : \frac{1}{\tilde{\sigma}_n^2} \end{aligned} \quad (3.76)$$

В цьому випадку одним із значень статистичної ваги треба задатися.

Якщо значення дисперсій невідомі, то можна оцінювати вагу, виходячи із таких міркувань. Звичайно для проведення експерименту необхідно виконання умови $\varepsilon_i \cong \sigma_i$ (дивись вище). Тоді, якщо відома похибка ε_i , то можна провести оцінку ваги із співвідношення:

$$g_1 : g_2 : g_3 : \dots : g_i : \dots : g_n = \frac{1}{\varepsilon_1^2} : \frac{1}{\varepsilon_2^2} : \frac{1}{\varepsilon_3^2} : \dots : \frac{1}{\varepsilon_i^2} : \dots : \frac{1}{\varepsilon_n^2} \quad (3.77)$$

3.16. Сумісність результатів досліджень

Часто виникає необхідність співставити дані, які отримані у різних умовах (різні прилади, експериментатори, методики и т.п.). Розходження поміж отриманими результатами може бути пов'язано із:

- наявністю систематичної помилки, в цьому випадку результати вважаються нерівноточними;
- відхилення носять випадковий характер і пов'язані із великим розсіянням результатів, в цьому випадку можна вважати, що ці

результати належать до однієї генеральної сукупності точок, вони знаходяться в межах похибки досліду і вважаються сумісними.

Для несумісних результатів знаходять причину, що викликала систематичну похибку, та позбуваються її. Сумісні результати можна обробити як нерівноточні вимірювання.

Найпростіший критерій сумісності результатів – це перекривання (чи не перекривання) довірчих інтервалів. Перекриванню відповідають сумісні результати, а не перекриванню – несумісні.

Якщо I_{β_1} та I_{β_2} - це напівширини довірчих інтервалів, то умову сумісності можна записати таким чином:

$$I_{\beta_1} + I_{\beta_2} > |\bar{x}_2 - \bar{x}_1| \quad (3.78)$$

де \bar{x}_1 та \bar{x}_2 - середні значення величин, що порівнюють.

Інший спосіб перевірки сумісності \bar{x}_1 та \bar{x}_2 полягає у співставленні різниці $|\bar{x}_2 - \bar{x}_1|$ із середньоквадратичною похибкою цієї різниці. Вводиться параметр

$$t = \frac{|\bar{x}_2 - \bar{x}_1|}{\tilde{\sigma}_{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}} \quad (3.79)$$

При достатньо великому числі вимірювань величина t підкоряється нормальному розподіленню, отже, $t = \Phi^{-1}(\beta)$, де β - ймовірність того, що t не перевищує значення, що задано наперед, тобто ймовірність того, що відхилення $|\bar{x}_2 - \bar{x}_1|$ не перевищує $t \cdot [\tilde{\sigma}_{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}]$. Задаючись достатньо великим значенням довірчої ймовірності β ($\beta = 0,99$), знаходять t та співставляють його із значенням $t_{\text{експ}}$, яке розраховують

із формули (3.78). Якщо $t_{\text{експ}} < t = \Phi^{-1}(\beta)$, то результати вважаються сумісними.

Критерії (3.78 та (3.79) дають практично однакові результати.

На закінчення можна навести схему послідовності обробки експериментальних результатів (рис.3.15).

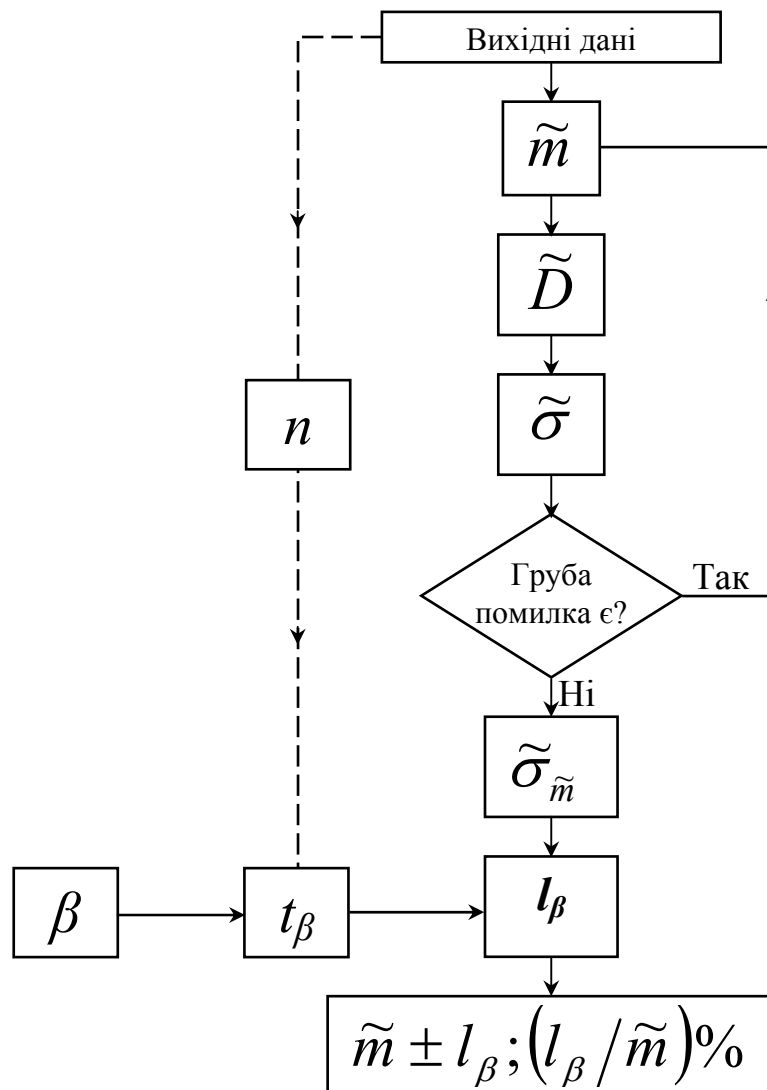


Рис.3.15. Блок-схема обробки експериментальних результатів

Для вихідних результатів спочатку обраховується значення оцінок математичного сподівання, дисперсії та середньо квадратичного відхилення. Якщо є груба помилка, то треба повернутися до вихідних даних, їх переробити та знову обрахувати значення оцінок математичного сподівання, дисперсії та середньо квадратичного

відхилення. Якщо грубої помилки немає, то обчислюється оцінка середньо квадратичного відхилення для оцінки математичного сподівання. Потім, виходячи із кількості точок (n), та бажаної довірчої ймовірності (β), знаходять значення t_β і будують довірчий інтервал (l_β).

Питання для самостійного повторення

Замість крапок запишіть таке продовження тексту, щоб отримати правильне означення або твердження. Де можливо запишіть відповідну формулу.

1. Оцінкою параметра можна назвати...
2. Вимоги до оцінки параметра: ...
3. Оцінкою для математичного сподівання є...
4. Оцінка математичного сподівання є незміщеною, тому що: ...
5. Ефективність оцінки математичного сподівання підтверджується...
6. Оцінка для дисперсії є...
7. Зміщеність для дисперсії визначається ...
8. Обґрунтованість для дисперсії визначається ...
9. Середньоквадратична помилка середнього арифметичного – це...
10. Правило трьох сигм полягає у...
11. Довірчий інтервал визначається як...
12. Закону розподілу Стюдента ступенями свободи має вигляд:
13. Скільки треба вимірити значень для проведення коректного експерименту?
14. Абсолютної похибки це...
15. Відносну похибку це...
16. Похибку (ε_u) деякої величини u , яка зв'язана функціональною залежністю: $u = f(x)$ з безпосередньо вимірюваною величиною x , визначається як...

17. Похибка добутку двох величин визначається як ...
18. Похибка суми двох величин визначається як ...
19. Похибка різниці двох величин визначається як ...
20. Похибка різниці двох близьких величин визначається як ...
21. Результати є нерівноточними, якщо...
22. Оцінкою математичного сподівання для нерівноточних вимірювань є...
23. Дисперсія для нерівноточних вимірювань визначається як ...
24. Визначення статистичні ваги може бути проведено ...
25. Сумісні результати можна обробити як...
26. Обробки експериментальних результатів проводиться наступним чином...

Задачі для самостійного розв'язку

1. При нормальному розподіленні відхилення (ρ) визначається з умови:

$$p(|x - m| < \rho) = \frac{1}{2}, \text{ тобто поява випадкової величини } x \text{ всередині відрізка}$$

шириною 2ρ (що розташований симетрично відносно математичного сподівання) та за його межі – подія рівноймовірна. Знайти зв'язок ρ та δ .

Відповідь: $\rho = 0,59\delta$.

2. Проведено серію вимірювань опору оцтової кислоти при 22°C . Розраховані значення константи дисоціації $K_{\text{дис}}$. Розрахувати випадкову похибку ($\delta_x = \delta_{m_x} = \delta_K$), якщо довірна ймовірність 0,95.

n	$K_{\text{дис}} \cdot 10^5$
1	2
1	1,57
2	1,65

3	1,79
1	2
4	2,01
5	1,91
6	2,02
7	2,10
8	2,15
9	1,90

Відповідь: $\bar{K} = (1,90 \pm 0,14) \cdot 10^{-5}$.

3. При проведенні лабораторної роботи по встановленню кінетичних параметрів мутаратації глюкози отримали дві серії констант швидкостей: k_1 (в присутності HCl) та k_2 (без HCl). Розрахувати похибку експеримента.

n	$k_1 \cdot 10^3, \text{c}^{-1}$	$k_2 \cdot 10^4, \text{c}^{-1}$
1	1,46	1,56
2	1,38	1,81
3	1,72	1,92
4	1,85	2,04
5	1,73	1,69
6	1,68	1,91
7	1,75	1,84
8	1,73	1,81
9	1,59	1,77
10	1,71	1,78
11	1,85	1,93
12	1,64	1,82

Відповідь:

$$\bar{k}_1 = (1,67 \pm 0,09) \cdot 10^{-3} c^{-1},$$

$$\bar{k}_2 = (1,82 \pm 0,09) \cdot 10^{-4} c^{-1}.$$

4. Різні автори отримали наступні значення для швидкості світла:

<i>n</i>	<i>c_i</i> , км /с	<i>g_i</i>
1	299784,00	0,10
2	299782,00	0,01
3	299798,00	0,04
4	299774,00	0,62
5	299786,00	0,10
6	299771,00	0,10
7	299771,00	0,10
8	299776,00	0,27
9	299776,00	0,12
10	299793,10	250,00
11	299776,00	0,04
12	299789,80	1,11
13	299792,00	0,27
14	299792,00	1,11
15	299792,50	10,00
16	299789,50	111,1
17	299792,60	20,20
18	299793,00	111,10
19	299795,10	1,04
20	299792,40	1,74
21	299794,20	5,10

У таблиці наведені значення статистичної ваги (g_i) для кожного значення c_i . Знайти генеральне середнє значення для швидкості світла (c_i).

Відповідь:

$$\begin{aligned}\tilde{m}_c &= 299792,22 \pm 0,81, \\ \tilde{\sigma}_{\tilde{m}_c} &= 0,39\end{aligned}$$

Приклади статистичної обробки результатів хімічного експерименту

Приклад 3.11. Визначення залишкового вмісту стиролу у двох зразках полімеру

В якості прикладу проведемо статистичну обробку результатів визначення залишкового вмісту (c , %) стиролу в двох зразках полімеру, отриманого методом безперервної полімеризації у масі (таблиця 3.8).

Розрахунок вибірових числових характеристик випадкових величин. За (3.1), (3.9) та (3.10) розраховуємо вибірові середні, дисперсії та середньоквадратичні відхилення:

$$\bar{x}_I = \frac{2,79}{5} = 0,5580; \quad \bar{x}_{II} = \frac{1,77}{4} = 0,4425;$$

$$\tilde{D}_{x(I)} = \frac{0,001280}{4} = 0,0003200; \quad \tilde{\sigma}_{x(I)} = \sqrt{0,0003200} = 0,01789;$$

$$\tilde{D}_{x(II)} = \frac{0,001475}{3} = 0,0004917; \quad \tilde{\sigma}_{x(II)} = \sqrt{0,0004917} = 0,02217.$$

Таблиця 3.8

Концентрація стиролу в зразках полімеру

№	Концентрація стиролу, %	
	Зразок I	Зразок II
1	0,56	0,47
2	0,58	0,43
3	0,57	0,42
4	0,54	0,45
5	0,54	

Оскільки отримані величини є проміжними, тут і далі округлювання проведемо з точністю до чотирьох значущих цифр. Результати розрахунку проміжних величин і основних статистичних характеристик результатів аналізу зведено в таблицях 3.9 і 3.10. З метою спрощення запису проміжних результатів, одиниці виміру опущені, і вони будуть наведені тільки в записі остаточного результату.

Таблиця 3.9

Проміжні результати розрахунку статистичних характеристик результатів аналізу

№	Зразок I			Зразок I		
	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2 \times 10^{-6}$	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2 \times 10^{-6}$
1	0,56	0,002	4,000	0,47	0,0275	756,2*
2	0,58	0,022	484,0	0,43	-0,013	156,3
3	0,57	0,012	144,0	0,42	-0,023	506,3
4	0,54	-0,018	324,0	0,45	0,0075	56,3
5	0,54	-0,018	324,0			
Σ	2,79		1280	1,77		1475

Примітка. Наведені величини обчислені з точністю до 9 значущих цифр та округлені до чотирьох значущих цифр.

Перевірка гіпотези однорідності результатів паралельних дослідів.

Як видно з таблиці 3.9, для зразка I полімеру максимальне відхилення концентрації стиролу від вибіркового середнього спостерігається для результатів аналізу під номером 2. Для того, щоб визначити, чи є це значення аномальним та чи доцільно його виключення з аналізу, за формулою (3.30) розраховуємо параметр τ

$$\tau_1 = \frac{|0,58 - 0,558|}{0,01789} = 1,230$$

та порівнюємо його із критичним значенням розподілення максимального відносного відхилення з таблиці 7 додатка. При рівні значимості $p = 0,05$ та об'ємі вибірки $n = 5$ критичне значення $\tau(p, n)$ дорівнює 1,87. Отже, виконується нерівність $\tau_1 < \tau(0,05, n)$: $1,230 < 1,87$, даний результат аналізу із ймовірністю 95% належить до генеральної сукупності дослідженої випадкової величини та його не можна відкинути.

Аналогічно, для зразка II максимальне відхилення концентрації стиролу від вибіркового середнього спостерігається для результату аналізу під номером 1 та розрахункове значення параметра τ_{II} складає 1,240:

$$\tau_{II} = \frac{|0,47 - 0,4425|}{0,02217} = 1,240.$$

При рівні значимості $p = 0,05$ та об'ємі вибірки $n = 4$ критичне значення $\tau(p, n)$ дорівнює 1,69. Значить, і в цьому випадку виконується нерівність $\tau_{II} < \tau(0,05, n)$ та результат аналізу, що розглядається, не можна виключити з емпіричної вибірки.

Таблиця 3.10

Результати розрахунку статистичних характеристик результатів аналізу

№		Зразок I	Зразок II
1	n	5	4
2	\bar{x}	0,5580	0,4425
3	$\tilde{D}_x \cdot 10^{-6}$	320,0	491,7
4	$\tilde{\sigma}_x \cdot 10^{-3}$	17,89	22,17
5	τ	1,230	1,240
6	$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} \cdot 10^{-3}$	10,31	13,33

Порівняння двох стандартних відхилень. Дисперсії та середньоквадратичні відхилення для результатів аналізу зразків I і II помітно відрізняються (див. табл. 3.10). Чи є ці відмінності статистично значущі? За формулою (3.37) розраховуємо дисперсійне відношення

$$F = \frac{\tilde{D}_{x1}}{\tilde{D}_{x2}} = \frac{\tilde{D}_{x(II)}}{\tilde{D}_{x(I)}} = \frac{0,0004917}{0,0003200} = 1,537.$$

При цьому враховуємо, що в чисельнику завжди міститься більша із двох дисперсій, що розглядаються, у даному прикладі – дисперсія результатів аналізу для зразка II ($\tilde{D}_{x(II)}$).

За таблицею 6 додатка знаходимо, що при рівні значимості $p = 0,05$ та числах ступенів свободи $f_1 = n_{II} - 1 = 3$ та $f_2 = n_I - 1 = 4$ значення F -розподілу Фішера $F(p, f_1, f_2)$ дорівнює 6,591. Таблиця побудована таким чином, що число ступенів свободи f_1 завжди відповідає найбільшій дисперсії, а f_2 – відповідно найменшій.

Порівняння розрахованого дисперсійного відношення F та критичного значення $F(p, f_1, f_2)$ показує, що виконується нерівність $F < F(0,05, f_1, f_2)$. Тому гіпотезу *про однорідність дисперсій*, безумовно, слід визнати такою, що узгоджується з експериментальними даними. Таким чином, застосування статистичного критерію показує, що генеральні дисперсії, які відповідають вибірковим дисперсіям $\tilde{D}_{x(I)} = 320,0 \cdot 10^{-6}$ та $\tilde{D}_{x(II)} = 491,7 \cdot 10^{-6}$, рівні, тобто дисперсії $\tilde{D}_{x(I)}$ та $\tilde{D}_{x(II)}$ однорідні.

Перевірка гіпотези про рівність двох математичних сподівань. Як видно з таблиці 3.10, середні значення залишкової концентрації стиrolу в зразках I і II також відрізняються. У цьому випадку для оцінки статистичної значимості відмінностей \bar{x}_I та \bar{x}_{II} необхідно провести перевірку гіпотези про рівність двох математичних сподівань. Оскільки в даному прикладі аналізуються дві серії рівноточних результатів аналізу концентрацій стиrolу (дисперсії для цих серій однорідні), тоді за формулами (3.41) і (3.42) розраховуємо середньозважену дисперсію та її число ступенів свободи

$$\tilde{s}_A^2 = \frac{4 \cdot 0,00032 + 3 \cdot 0,0004917}{4 + 3} = 0,0003936;$$

$$f_A = 4 + 3 = 7$$

Потім за (3.45) розраховуємо значення t -критерію

$$t_{\bar{x}} = \frac{|0,5580 - 0,4425|}{\sqrt{0,0003936}} \sqrt{\frac{5 \cdot 4}{5+4}} = 8,679$$

та порівнюємо його із критичним значенням t -розподілу Стьюдента при числі ступенів свободи $f_A = 7$ та рівнях значимості $p = 0,025$ та $p = 0,005$.

Оцінюємо спочатку можливість прийняття гіпотези. Для цього з таблиці 4 додатка знаходимо $t(0,025, f_A) = 2,365$. Так як нерівність $t \leq t(0,025, f_A)$ не виконується ($8,679 > 2,365$), то з 5%-вим рівнем значимості гіпотези, що перевіряється, не може бути прийнята.

Тепер оцінимо можливість відкидання гіпотези. З таблиці 4 додатка знаходимо $t(0,005, f_A) = 3,499$. У цьому випадку нерівність $t > t(0,005, f_A)$ виконується ($8,679 > 3,499$) і гіпотеза, що оцінюється, H_0 повинна бути відкинута. Отже, отримані середні значення залишкових концентрацій стиролу в зразках I та II є оцінками різних генеральних середніх (у даному випадку – різних істинних значень концентрації стиролу). Іншими словами, відмінності в залишкових концентраціях стиролу в зразках I та II статистично значущі.

Довірчий інтервал. Оцінимо випадкові помилки для середніх значень концентрації стиролу при довірчій імовірності $\beta = 0,95$. Для зразка I з таблиці 4 додатка знаходимо, що при рівні значимості $p = 0,025$ та числі ступенів свободи $f_I = 4$, значення t -розподілу Стьюдента буде $t(0,025, f) = 2,776$. Аналогічно, для зразка II при $f_{II} = 3$ значення $t(0,025, f) = 3,182$. Тоді, з урахуванням (3,56), випадкові помилки з імовірністю 95 % будуть задаватися нерівностями:

$$\varepsilon_I < \frac{2,776 \cdot 0,01789}{\sqrt{5}} = 0,02221; \quad \varepsilon_{II} < \frac{3,182 \cdot 0,02217}{\sqrt{4}} = 0,03527.$$

З урахуванням випадкових помилок і виразів (3.57), (3.58) концентрація стиролу у зразку I з імовірністю 95 % буде знаходитися в довірчому інтервалі

$$0,5580 \pm 0,02221.$$

Оскільки перша значуща цифра випадкової помилки дорівнює 2, то її значення округлюємо до другої значущої цифри (0,022). Отримана величина помилки показує, що перша значуща цифра середньої концентрації стиролу (у розряді десятих) правильна. Цифра в розряді десятитисячних неправильна, а цифра в розряді сотих має невизначеність приблизно у 2 одиниці. Тоді остаточно середнє значення концентрації стиролу у зразку I буде дорівнювати

$$c = (0,558 \pm 0,022) \%.$$

Концентрація стиролу для зразка II з імовірністю 95 % буде знаходитися в довірчому інтервалі

$$0,4425 \pm 0,03527.$$

Оскільки перша значуща цифра випадкової помилки більша 2, то її значення округлюємо до першої значущої цифри (0,04). Отримана величина помилки показує, що перша значуща цифра середньої концентрації стиролу (у розряді десятих) правильна. Цифра в розряді тисячних неправильна, а цифра в розряді сотих має невизначеність приблизно в 4 одиниці. Тоді остаточно середнє значення концентрації стиролу для зразка II буде дорівнювати

$$c = (0,44 \pm 0,04) \%.$$

Приклад 3.12. Визначення вмісту кальцію у зубній емалі

В якості прикладу проведемо статистичну обробку результатів визначення вмісту (w , %) кальцію в двох зразках зубної емалі методом атомно-абсорбційної спектроскопії (таблиця 3.11).

Розрахунок вибірових числових характеристик випадкових величин. За (3.1), (3.9) та (3.10) розраховуємо вибірові середні, дисперсії та середньоквадратичні відхилення:

$$\begin{aligned}\bar{x}_I &= \frac{652,4}{20} = 32,62; & \bar{x}_{II} &= \frac{611,4}{20} = 30,57; \\ \tilde{D}_{x(I)} &= \frac{11,2720}{19} = 0,5933; & \tilde{\sigma}_{x(I)} &= \sqrt{0,5933} = 0,7703; \\ \tilde{D}_{x(II)} &= \frac{12,8820}{19} = 0,6780; & \tilde{\sigma}_{x(II)} &= \sqrt{0,6780} = 0,8234.\end{aligned}$$

Таблиця 3.11

Вміст кальцію у зразках зубної емалі

№	Вміст кальцію, %	
	Зразок I	Зразок II
1	32,8	31,1
2	32,0	30,9
3	33,0	29,1
4	31,6	30,4
5	32,9	30,8
6	32,4	32,0
7	31,9	30,5
8	34,2	29,8
9	33,0	30,9
10	32,1	30,6
11	33,3	29,1

Продовження таблиці 3.11

№	Вміст кальцію, %	
	Зразок I	Зразок II
12	32,2	30,7
13	32,0	30,3
14	33,4	29,5
15	33,3	30,7
16	32,9	31,1
17	33,7	31,5
18	31,0	30,5
19	32,3	29,8
20	32,4	32,1

Результати розрахунку проміжних величин і основних статистичних характеристик результатів аналізу зведено в таблицях 3.12 і 3.13. З метою спрощення запису проміжних результатів, одиниці виміру опущені, і вони будуть наведені тільки в записі остаточного результату. Отримані проміжні величини округлюємо з точністю до чотирьох значущих цифр.

Таблиця 3.12

Проміжні результати розрахунку статистичних характеристик результатів аналізу

№	Вміст кальцію, %					
	Зразок I			Зразок II		
	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	32,8	0,18	0,0324	31,1	0,53	0,2809
2	32	-0,62	0,3844	30,9	0,33	0,1089
3	33	0,38	0,1444	29,1	-1,47	2,1609

Продовження таблиці 3.12

№	Вміст кальцію, %					
	Зразок I			Зразок II		
	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
4	31,6	-1,02	1,0404	30,4	-0,17	0,0289
5	32,9	0,28	0,0784	30,8	0,23	0,0529
6	32,4	-0,22	0,0484	32	1,43	2,0449
7	31,9	-0,72	0,5184	30,5	-0,07	0,0049
8	34,2	1,58	2,4964	29,8	-0,77	0,5929
9	33	0,38	0,1444	30,9	0,33	0,1089
10	32,1	-0,52	0,2704	30,6	0,03	0,0009
11	33,3	0,68	0,4624	29,1	-1,47	2,1609
12	32,2	-0,42	0,1764	30,7	0,13	0,0169
13	32	-0,62	0,3844	30,3	-0,27	0,0729
14	33,4	0,78	0,6084	29,5	-1,07	1,1449
15	33,3	0,68	0,4624	30,7	0,13	0,0169
16	32,9	0,28	0,0784	31,1	0,53	0,2809
17	33,7	1,08	1,1664	31,5	0,93	0,8649
18	31	-1,62	2,6244	30,5	-0,07	0,0049
19	32,3	-0,32	0,1024	29,8	-0,77	0,5929
20	32,4	-0,22	0,0484	32,1	1,53	2,3409
Σ	652,4		11,272	611,4		12,882

Перевірка гіпотези однорідності результатів паралельних дослідів.

Як видно з таблиці 3.13, для зразка I зубної емалі максимальне відхилення вмісту кальцію від вибіркового середнього спостерігається для результатів аналізу під номером 18. Для того, щоб визначити, чи є це значення аномальним та чи доцільно його виключення з аналізу, за формулою (3.30) розраховуємо параметр τ

$$\tau_1 = \frac{|32,62 - 31|}{0,7703} = 2,103$$

та порівнюємо його із критичним значенням розподілу максимального відносного відхилення з таблиці 7 додатка. При рівні значимості $p = 0,05$ та об'ємі вибірки $n = 20$ критичне значення $\tau(p, n)$ дорівнює 2,62. Отже, виконується нерівність $\tau_1 < \tau(0,05, n)$: $2,103 < 2,62$, даний результат аналізу із ймовірністю 95% належить до генеральної сукупності дослідженої випадкової величини та його не можна відкинути.

Таблиця 3.13

Результати розрахунку статистичних характеристик результатів аналізу

№		Зразок I	Зразок II
1	n	20	20
2	\bar{x}	32,62	30,57
3	\tilde{D}_x	0,5933	0,6780
4	$\tilde{\sigma}_x$	0,7703	0,8234
5	τ	2,103	1,858
6	$\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$	0,1722	0,1841

Аналогічно, для зразка II максимальне відхилення вмісту кальцію від вибіркового середнього спостерігається для результату аналізу під номером 20 та розрахункове значення параметра τ_{II} складає 1,858:

$$\tau_{II} = \frac{|30,57 - 32,1|}{0,8234} = 1,858.$$

При рівні значимості $p = 0,05$ та об'ємі вибірки $n = 20$ критичне значення $\tau(p, n)$ дорівнює 2,62. Значить, і в цьому випадку виконується

нерівність $\tau_{II} < \tau(0,05, n)$ та результат аналізу, що розглядається, не можна виключити з емпіричної вибірки.

Перевірка гіпотези належності вибірки до нормального розподілення. Розглянемо перевірку належності вибірки I і II до нормального розподілення за допомогою непараметричного критерію Колмогорова-Смирнова. Для цього з упорядкованих за зростанням експериментальних даних зразка зубної емалі I обчислюють відносну (v_i) та кумулятивну (w_{v_i}) частоти появи результатів вимірів (x_i) за формулами (3.32) та (3.33). Результати розрахунків наведено у таблиці 3.14.

Таблиця 3.14

Проміжні результати розрахунку для перевірки нормального розподілу даних для зразка I за критерієм Колмогорова-Смирнова

№	x_i	v_i	w_{v_i}	u_i	$\varphi(u_i)$	$ d_i $
1	31,0	0,05	0,05	-2,103	0,01786	0,03214
2	31,6	0,05	0,1	-1,324	0,09342	0,006582
3	31,9	0,05	0,15	-0,9347	0,1762	0,02619
4	32,0	0,05	0,2	-0,8049	0,2119	0,01186
5	32,0	0,05	0,25	-0,8049	0,2119	0,03815
6	32,1	0,05	0,3	-0,6751	0,2483	0,05175
7	32,2	0,05	0,35	-0,5452	0,2912	0,05884
8	32,3	0,05	0,4	-0,4154	0,3372	0,06276
9	32,4	0,05	0,45	-0,2856	0,3859	0,06409
10	32,4	0,05	0,5	-0,2856	0,3859	0,1141
11	32,8	0,05	0,55	0,2337	0,5910	0,04095

Продовження таблиці 3.14

№	x_i	v_i	w_{v_i}	u_i	$\varphi(u_i)$	$ d_i $
12	32,9	0,05	0,6	0,3635	0,6406	0,04058
13	32,9	0,05	0,65	0,3635	0,6406	0,009424
14	33,0	0,05	0,7	0,4933	0,6879	0,01207
15	33,0	0,05	0,75	0,4933	0,6879	0,06207
16	33,3	0,05	0,8	0,8828	0,8106	0,01057
17	33,3	0,05	0,85	0,8828	0,8106	0,03943
18	33,4	0,05	0,9	1,013	0,8438	0,05625
19	33,7	0,05	0,95	1,402	0,9192	0,03076
20	34,2	0,05	1	2,051	0,9798	0,02018

Далі нормують значення x_i за формулою (3.34) і знаходять значення гаусового інтеграла $\varphi(u_i)$, що відповідають u_i (див. табл. 8 додатка). Потім розраховують різницю $|d_i|$ згідно з рівнянням (3.35) і порівнюють максимальну з них $|d|_{max} = 0,1141$ з граничним значенням критерію Колмогорова-Смирнова $d(p, n)$ при рівні значимості $p = 0,05$ і числі паралельних вимірювань $n = 20$ (див. табл. 4 додатка). Порівняння цих величин показує, що виконується нерівність $|d|_{max} < d(p, n)$: $0,1141 < 0,192$. Тому гіпотезу про належність даних зразка I до нормального розподілу, безумовно, слід прийняти.

Аналогічно проводимо розрахунки для зразка II. Результати обчислювань наведено у таблиці 3.15. Порівняння величини $|d|_{max} = 0,1111$ з граничним значенням критерію Колмогорова-Смирнова $d(p, n)$ при рівні значимості $p = 0,05$ і числі паралельних вимірювань $n = 20$ показує, що виконується нерівність $|d|_{max} < d(p, n)$: $0,1111 < 0,192$. Це

означає, що немає підстав відкидати гіпотезу про нормальне розподілення даних зразка II.

Таблиця 3.15

Проміжні результати розрахунку для перевірки нормального розподілення даних для зразка II за критерієм Колмогорова-Смирнова

№	x_i	v_i	w_{v_i}	u_i	$\varphi(u_i)$	$ d_i $
1	29,1	0,05	0,05	-1,785	0,03673	0,01327
2	29,1	0,05	0,1	-1,785	0,03673	0,06327
3	29,5	0,05	0,15	-1,299	0,09680	0,05320
4	29,8	0,05	0,2	-0,9352	0,1736	0,02639
5	29,8	0,05	0,25	-0,9352	0,1736	0,07639
6	30,3	0,05	0,3	-0,3279	0,3707	0,07070
7	30,4	0,05	0,35	-0,2065	0,4168	0,06683
8	30,5	0,05	0,4	-0,08501	0,4641	0,06414
9	30,5	0,05	0,45	-0,08501	0,4341	0,01586
10	30,6	0,05	0,5	0,03643	0,5160	0,01595
11	30,7	0,05	0,55	0,1579	0,5636	0,01356
12	30,7	0,05	0,6	0,1579	0,5636	0,03644
13	30,8	0,05	0,65	0,2793	0,6103	0,03974
14	30,9	0,05	0,7	0,4008	0,6554	0,04458
15	30,9	0,05	0,75	0,4008	0,6554	0,09458
16	31,1	0,05	0,8	0,6437	0,7389	0,06109
17	31,1	0,05	0,85	0,6437	0,7389	0,1111
18	31,5	0,05	0,9	1,129	0,8708	0,02924
19	32,0	0,05	0,95	1,737	0,9591	0,009070
20	32,1	0,05	1	1,858	0,9686	0,03144

Порівняння двох стандартних відхилень. Дисперсії та середньоквадратичні відхилення для результатів аналізу зразків I і II помітно відрізняються (див. табл. 3.13). Чи є ці відмінності статистично значущі? За формулою (3.37) розраховуємо дисперсійне відношення

$$F = \frac{\tilde{D}_{x(II)}}{\tilde{D}_{x(I)}} = \frac{0,6780}{0,5933} = 1,143.$$

При цьому враховуємо, що в чисельнику завжди міститься більша із двох дисперсій, що розглядаються, у даному прикладі – дисперсія результатів аналізу для зразка II ($\tilde{D}_{x(II)}$).

За рівнянням, що наведено у таблиці 6 додатка розраховуємо, що при рівні значимості $p = 0,05$ та числах ступенів свободи $f = f_1 = f_2 = n_1 - 1 = n_{II} - 1 = 19$ значення F -розподілу Фішера $F(p, f)$ дорівнює

$$F(0,05, f) \approx \frac{115}{(f+1)^2} + 2 \approx \frac{115}{(19+1)} + 2 \approx 2,288$$

Порівняння розрахованого дисперсійного відношення F та критичного значення $F(p, f)$ показує, що виконується нерівність $F < F(0,05, f)$. Тому гіпотезу про однорідність дисперсій, безумовно, слід визнати такою, що узгоджується з експериментальними даними. Таким чином, застосування статистичного критерію показує, що генеральні дисперсії, які відповідають вибірковим дисперсіям $\tilde{D}_{x(I)} = 0,5933$ та $\tilde{D}_{x(II)} = 0,6780$, рівні, тобто дисперсії $\tilde{D}_{x(I)}$ та $\tilde{D}_{x(II)}$ однорідні.

Перевірка гіпотези про рівність двох математичних сподівань. Як видно з таблиці 3.13, середні значення вмісту кальцію в зразках I і II також відрізняються. У цьому випадку для оцінки статистичної

значимості відмінностей \bar{x}_I та \bar{x}_{II} необхідно провести перевірку гіпотези про рівність двох математичних сподівань. Оскільки в даному прикладі аналізуються дві серії рівноточних результатів аналізу вмісту кальцію (дисперсії для цих серій однорідні), то за формулами (3.43) і (3.44) розраховуємо середньозважену дисперсію та її число ступенів свободи

$$S_A^2 = \frac{0,5933 + 0,6780}{2} = 0,6357;$$
$$f_A = 2 \cdot (20 - 1) = 38$$

Потім за (3.45) розраховуємо значення t -критерію

$$t_{\bar{x}} = \frac{|32,62 - 30,57|}{\sqrt{0,6357}} \sqrt{\frac{20 \cdot 20}{20 + 20}} = 8,130$$

та порівнюємо його із критичним значенням t -розподілу Стьюдента при числі ступенів свободи $f_A = 2 \cdot (20 - 1) = 38$ та рівнях значимості $p = 0,025$ та $p = 0,005$.

Оцінюємо спочатку можливість прийняття гіпотези. Для цього за рівнянням, що наведено у таблиці 4 додатка розраховуємо критичне значення t -розподілу Стьюдента

$$t(0,025, f_A) \approx 2,0 + \frac{2,5}{f_A} \approx 2,0 + \frac{2,5}{38} \approx 2,066.$$

Так як нерівність $t \leq t(0,025, f_A)$ не виконується ($8,130 > 2,066$), то з 5 %-м рівнем значимості гіпотеза, що перевіряється, не може бути прийнята.

Тепер оцінимо можливість відкидання гіпотези:

$$t(0,005, f_A) \approx 2,5 + \frac{7,0}{f_A} \approx 2,5 + \frac{7,0}{38} \approx 2,684.$$

У цьому випадку нерівність $t > t(0,005, f_A)$ виконується ($8,130 > 2,684$) і гіпотеза, що оцінюється, H_0 повинна бути відкинута. Отже, отримані середні значення вмісту кальцію в зразках I та II є оцінками різних генеральних середніх (у даному випадку – різних істинних значень вмісту кальцію). Іншими словами, відмінності у вмісту кальцію в зразках зубної емалі I та II статистично значущі.

Довірчий інтервал. Оцінимо випадкові помилки для середніх значень вмісту кальцію при довірчій імовірності $\beta = 0,95$. Для зразка I з таблиці 2 додатка знаходимо, що при рівні значимості $p = 0,025$ та числі ступенів свободи $f_I = f_{II} = n - 1 = 19$, значення t -розподілу Стьюдента буде $t(0,025, f) = 2,093$. Тоді, з урахуванням (3.56), випадкові помилки з імовірністю 95 % будуть задаватися нерівностями:

$$\varepsilon_I < \frac{0,7703 \cdot 2,093}{\sqrt{20}} = 0,3605; \quad \varepsilon_{II} < \frac{0,8234 \cdot 2,093}{\sqrt{20}} = 0,3854.$$

З урахуванням випадкових помилок і виразів (3.57), (3.58), вміст кальцію для зразка I з імовірністю 95 % буде знаходитися у довірчому інтервалі

$$32,65 \pm 0,3605.$$

Оскільки перша значуща цифра випадкової помилки більше 2, то її значення округлюємо до однієї значущої цифри (0,4). Отримана величина помилки показує, що перші дві цифри вмісту кальцію (у розряді цілих) правильні. Цифра в розряді сотих неправильна, а цифра в розряді десятих має невизначеність приблизно в 4 одиниці. Тоді

остаточно середнє значення вмісту кальцію для зразка I буде дорівнювати

$$w = (32,7 \pm 0,4) \%$$

Кількість кальцію для зразка зубної емалі II з імовірністю 95 % буде знаходитися у довірчому інтервалі

$$30,57 \pm 0,3854$$

Оскільки перша значуща цифра випадкової помилки більше 2, то її значення округлюємо до однієї значущої цифри (0,4). Отримана величина помилки показує, що перші дві цифри вмісту кальцію (у розряді цілих) правильні. Цифра в розряді сотих неправильна, а цифра в розряді десятих має невизначеність приблизно в 4 одиниці. Тоді остаточно середнє значення вмісту кальцію для зразка II буде дорівнювати

$$w = (30,6 \pm 0,4)$$